

EM アルゴリズムによる MMPP パラメータ推定について

山田 雅裕[†] 中川 健治^{†a)}

Parameter Estimation for MMPP by EM Algorithm

Masahiro YAMADA[†] and Kenji NAKAGAWA^{†a)}

あらまし MMPP (Markov Modulated Poisson Process) は, ATM ネットワークにおける画像や音声等のバースト性をもつセルトラヒックに対する近似モデルとして用いられる. そして, MMPP のパラメータである到着率, 状態遷移率を正確に決定することは ATM ネットワークでの有効なトラヒック制御を可能とする. 本研究では, EM アルゴリズムを用いた MMPP パラメータ推定問題について検討する. 従来の研究では, 連続時間 MMPP への EM アルゴリズムの直接の適用 [1] や, MMBP (Markov Modulated Bernoulli Process) にモデル変換しての EM アルゴリズムの適用 [2] があるが, これらはいずれも計算量が多く, 実行時間が長いという問題がある. 本研究では複雑な計算を避け, 高速なパラメータ推定を行うために, 新たなモデルとして MMGP (Markov Modulated Geometric Process) を提案し, MMPP から MMGP へモデル変換して EM アルゴリズムを適用する方法を提案する. シミュレーションの結果, パラメータ推定精度は従来法と同程度で, 計算時間が従来法 [1] の約 7 分の 1, 従来法 [2] の約 115 分の 1 以下となることを確認した.

キーワード MMPP, EM アルゴリズム, パラメータ推定, MMGP, セル廃棄率

1. ま え が き

MMPP (Markov Modulated Poisson Process) は, 複数の状態間を連続時間マルコフ連鎖に従って状態が遷移し, 各々の状態でポアソン過程に従って事象が到着するモデルである. 到着率の高い状態と低い状態を考えることによりバースト性を表現できることから, ATM (Asynchronous Transfer Mode) ネットワークにおける画像や音声等のバースト性をもつセルトラヒックに対する近似モデルとして用いられる. そして, MMPP のパラメータである到着率, 状態遷移率を正確に決定することは ATM ネットワークでの有効なトラヒック制御を可能とする. 本研究では, EM (Expectation Maximization) アルゴリズムを用いた MMPP パラメータ推定問題について検討する.

過去の研究では, モーメントマッチング法による MMPP パラメータ推定法が Heffes ら [3] により提案されている. これは, 入力トラヒックのモーメントと

MMPP のモーメントが一致するようにパラメータを決定する方法である. しかし, この方法はパラメータ推定精度が悪いという点が文献 [2] で指摘されている. そこで, 精度の高いパラメータ推定を行うために, ゆう度関数をもととした EM アルゴリズムによるパラメータ推定法が提案されている [1], [2].

Rydén [1] では, MMPP へ EM アルゴリズムを直接的に適用することによりパラメータ推定を行う方法が提案されている. この方法は, 事象の到着時間間隔を観測データとし, 連続時間マルコフ連鎖の状態遷移を非観測データとして使い, 観測データと非観測データを合わせて完全データと考える. そして完全データの対数ゆう度関数を立て, EM アルゴリズムを適用してパラメータ推定を行う. しかし MMPP は連続時間確率過程であるため, 直接的な適用には行列の固有値の計算や数値積分等複雑な数値計算を伴うという問題点がある.

また Deng ら [2] では, モデルを MMPP から MMBP (Markov Modulated Bernoulli Process) へ変換し, EM アルゴリズムを適用するパラメータ推定法が提案されている. ここで MMBP とは, 事象の到着がベルヌーイ過程, 状態遷移が離散時間マルコフ連鎖に従うモデルである. この方法では, まず MMPP

[†] 株式会社エフ・ディー・シー, 土浦市
FDC Co., Ltd., Tsuchiura-shi, 300-1173 Japan

^{††} 長岡技術科学大学, 長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University
of Technology, Nagaoka-shi, 940-2188 Japan

a) E-mail: nakagawa@nagaokaut.ac.jp

から MMBP への観測データの変換を行う。微小時間 h を定め、 h により到着時間間隔の時間軸を離散化し、各 h ごとに 2 値データを生成する。すなわち、長さ h のタイムスロット中に事象の到着があれば 1、事象の到着がなければ 0 を生成する。その結果、到着時間間隔系列は 2 値データ系列に変換され、EM アルゴリズムの観測データとなる。次に MMPP から MMBP へのパラメータの変換を行う。これらのモデル変換を行った後、2 値データ系列を観測データとし、離散時間マルコフ連鎖の状態遷移を非観測データとして用い、両者を合わせて完全データと考え、完全データの対数ゆう度関数を立て、EM アルゴリズムを適用して MMBP パラメータ推定を行う。EM アルゴリズムでのパラメータ推定終了後、もとの MMPP ヘモデルを逆変換する。しかしこの方法において、各タイムスロットごとに観測データ (1 or 0) をもつため、観測データ量はもとの到着時間間隔データ量と比較して非常に多くなり、メモリ消費量が多い。また、各タイムスロットごとに状態遷移が起こるかどうかを調べるため、計算量が多いという問題点がある。

本研究ではこれらの問題を解決し、高速かつ高精度なパラメータ推定を行うために、新たなモデルとして MMGP (Markov Modulated Geometric Process) を提案し、MMPP から MMGP にモデル変換して EM アルゴリズムを適用する方法を提案する。シミュレーションによる従来法 [1], [2] との比較を行い、提案法の有効性を示す。

2. MMPP モデル

MMPP は、複数の状態間を連続時間マルコフ連鎖に従って状態が遷移し、各々の状態でポアソン過程に従って事象が到着するモデルである。また MMPP は、出力系列が与えられても状態遷移系列が一意に決まらないモデルであり、HMM (Hidden Markov Model) の一例である。到着率の高い状態と低い状態を考えることによりバースト性を表現できることから、ATM ネットワークにおける画像や音声等のバースト性をもつセルトラヒックに対する近似モデルとして用いられる。

R 状態 MMPP は、状態 i から j へ状態遷移率 σ_{ij} をもつ連続時間マルコフ連鎖に従って状態が遷移し、各状態 i において到着率 λ_i のポアソン過程に従って事象が到着するモデルである。ここで、状態遷移率とは式 (1) のような無限小生成行列 Σ の ij 要素のこと

をいう。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1R} \\ \sigma_{21} & -\sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{R1} & \sigma_{R2} & \cdots & -\sigma_{RR} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし、 $\sigma_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^R \sigma_{ij}$ である。

3. EM アルゴリズム

EM アルゴリズムは、観測できないデータを含む場合のモデルパラメータ推定を、最ゆう推定法によって行う繰返しアルゴリズムで、統計学では古くから知られている手法であり、Dempster ら [4] によって一般的に定式化がなされた。EM アルゴリズムは、観測データのみを用いて最ゆう推定を行うことが困難である場合に、観測データと非観測データを合わせて完全データと考え、完全データの最ゆう推定を間接的に利用して観測データに基づく最ゆう推定を行おうとするものである。

EM アルゴリズムは、E-step (Expectation-step) と M-step (Maximization-step) と呼ばれる二つのステップを繰り返すことによりパラメータを逐次更新する方法である。実行回数 $p = 1, 2, \dots$ に対して次の二つのステップを繰り返す。

【E-step】観測データ \mathbf{y} とパラメータ $\theta^{(p)}$ が与えられたという条件のもとで、完全データの対数ゆう度関数 $\log f(\mathbf{x}|\theta)$ の非観測データについての条件付き期待値を求める。つまり、

$$Q(\theta|\theta^{(p)}) = E[\log f(\mathbf{x}|\theta)|\mathbf{y}, \theta^{(p)}] \quad (2)$$

を計算する。

【M-step】E-step で求めた対数ゆう度関数の条件付き期待値を最大化するパラメータ $\theta = \theta^{(p+1)}$ を求める。つまり、

$$\theta^{(p+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta|\theta^{(p)}) \quad (3)$$

を計算する。

MMPP パラメータ推定への EM アルゴリズムの適用において、事象の到着時間間隔を観測データとして用い、連続時間マルコフ連鎖の状態遷移を非観測データとして用いる。MMPP パラメータ推定は観測できないデータ、すなわち連続時間マルコフ連鎖の状態遷

移, を含むモデルパラメータ推定問題であるため, パラメータ推定手法には EM アルゴリズムが有効である.

4. EM アルゴリズムによる MMPP パラメータ推定法の提案

本研究では, 複雑な計算を避け, 高速なパラメータ推定を行うために, 新たに MMGP (Markov Modulated Geometric Process) モデルを提案し, 計算の複雑な連続時間 MMPP から計算の容易な離散時間 MMGP へのモデルの変換を行い, MMGP に EM アルゴリズムを適用してパラメータ推定を行う. まず MMGP モデル, MMPP から MMGP へのモデル変換について示し, その後 EM アルゴリズムを用いたパラメータ推定法について示す.

4.1 MMGP モデル

MMGP は, 状態 i から j へ状態遷移確率 r_{ij} の離散時間マルコフ連鎖に従って状態が遷移し, 各状態 i において 1 タイムスロット中の事象到着確率 b_i の幾何分布に従って事象が到着するモデルである. MMGP モデルでは, 状態遷移が起こるのは事象の到着時のみである. 2 状態 MMGP の状態遷移図を図 1 に示す.

4.2 観測データ変換

MMPP の状態数 R は既知と仮定し, 与えられた観測データ系列, すなわち事象の到着時間間隔の系列を $y_1^N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ と示す. まず, 長さ h のタイムスロットを定め, 時間軸をタイムスロットによって離散化する. そして, 到着時間間隔をタイムスロットで数えた系列 $l_1^N = \{l_1, l_2, \dots, l_N\}$ を生成する (図 2). 提案法では離散化後の観測データ量は離散化前の観測データ量と変わらず N 個である. しかし従来法 [2] では, タイムスロットごとに観測データ, すなわち 2 値データをもつため, 離散化前の観測データ量よりも増加する. 観測期間を T とし, 平均到着間隔を a とすると, 観測期間中の観測データ量 N の平均値は約 T/a である. これが提案法のデータ数である. 一方,

従来法 [2] ではデータ数は T/h となる. 後に示す例では $a = 0.55, h = 10^{-3}$ 程度の値なので, 従来法 [2] のデータ数は非常に大きいものとなる.

また, 従来法 [2] では 1 タイムスロットごとに状態遷移が起こるかどうかを調べるため, 計算量が多くなるが, 提案法では事象の到着時のみ状態遷移を考えるため, 状態遷移回数が少なくすみ, 計算量をおさえることができる.

4.3 パラメータ変換

MMPP と MMGP のパラメータ変換を次式で示す.

$$b_i = \lambda_i h \quad \text{for } i = 1, \dots, R \quad (4)$$

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda_i} \quad \text{for } i, j = 1, \dots, R, i \neq j \quad (5)$$

ここで, b_i は MMGP の状態 i で 1 タイムスロット中に事象が到着する確率, r_{ij} は MMGP において事象の到着時に状態 i から j への状態遷移確率を表し, λ_i は MMPP の状態 i における到着率, σ_{ij} は MMPP の状態 i から j への状態遷移率を表す. 式 (4) の両辺は, 1 タイムスロット中に事象が到着する確率, 式 (5) の両辺は, 一つの到着当りの状態 i から j への遷移確率である. また, $r_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^R r_{ij}$ とする.

まず, MMGP パラメータ初期値を決定する際に式 (4), (5) のパラメータ変換式を用いる. 具体的には, 与えられた到着時間間隔の観測値から, k-means クラスタリング法 [2] を用いて MMPP パラメータの初期値を推定し, 得られた MMPP パラメータ初期値を式 (4), (5) に代入して, MMGP パラメータの初期値を決定する. k-means クラスタリング法は, 推定精度は低いが, 非常に高速なパラメータ推定を行えるという特徴があり, MMPP パラメータの初期値決定法として用いる. 式 (5) において, σ_{ij} が λ_i よりも大きい, すなわち $r_{ij} > 1$ となるような初期値を与えたとして

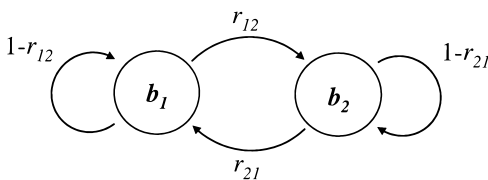


図 1 2 状態 MMGP モデル
Fig.1 2-state MMGP model.

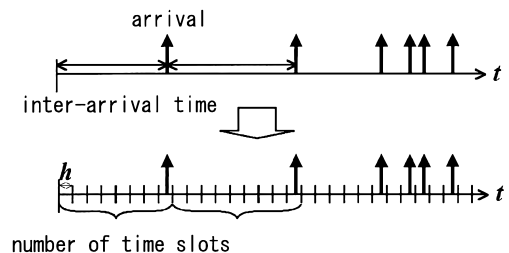


図 2 観測データ変換
Fig.2 Transformation of observed data.

も, EM アルゴリズムでは r_{ij} を, 後述の式 (12) によって求めるため, 1 回の繰返し以降 $r_{ij} \leq 1$ として推定される. ただし, $r_{ij} > 1$ のときには, $r_{ii} < 0$ となってしまうため, この場合には r_{ii} の符号を反転したものを初期値とする. また, $\lambda_i = 0$ という初期値が得られた場合には, 式 (5) の右辺に注意して, $\lambda_i \neq 0$ となる適当な値を初期値とする.

EM アルゴリズムで計算を行った後, MMGP パラメータ推定値 b_i, r_{ij} を式 (4), (5) に代入し, MMPP パラメータ推定値 λ_i, σ_{ij} へと逆変換する.

4.4 EM アルゴリズムによるパラメータ推定

R 状態 MMGP において, 観測データ系列 l_1^N から EM アルゴリズムを適用してパラメータ b_i, r_{ij} を推定する. MMGP パラメータ推定への EM アルゴリズムの適用において, 非観測データとして離散時間マルコフ連鎖の状態遷移 $\psi = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ を用いる. ここで, s_k は k 番目の状態を表す. 観測データと非観測データを合わせて完全データと考える.

【E-step】 観測データ l_1^N と現在のパラメータ $\mathbf{b}^{(p)} = (b_i^{(p)})_{i=1, \dots, R}, \mathbf{r}^{(p)} = (r_{ij}^{(p)})_{i,j=1, \dots, R}$ が与えられたときの完全データの対数ゆう度関数の非観測データ ψ , すなわち離散時間マルコフ連鎖の状態遷移についての条件付き期待値 $Q(\mathbf{b}, \mathbf{r} | \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)})$ を求める.

完全データのゆう度関数は

$$P\{l_1^N, \psi | \mathbf{b}, \mathbf{r}\} = \prod_{n=1}^N (1 - b_{s_n})^{l_n - 1} b_{s_n} r_{s_n s_{n+1}} \quad (6)$$

となり, 両辺の対数をとって

$$\begin{aligned} \log P\{l_1^N, \psi | \mathbf{b}, \mathbf{r}\} &= \sum_{n=1}^N [(l_n - 1) \log(1 - b_{s_n}) \\ &\quad + \log b_{s_n} + \log r_{s_n s_{n+1}}] \end{aligned} \quad (7)$$

となる. したがって E-step は次式の計算となる.

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{b}, \mathbf{r} | \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)}) &= E[\log P\{l_1^N, \psi | \mathbf{b}, \mathbf{r}\} | l_1^N, \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)}] \\ &= \sum_{\psi} \log P\{l_1^N, \psi | \mathbf{b}, \mathbf{r}\} P\{\psi | l_1^N, \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)}\} \\ &= \sum_{j=1}^R \sum_{i=1}^R \sum_{n=1}^N \xi_n(i, j) \log r_{ij} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^R \sum_{n=1}^N \gamma_n(i) [(l_n - 1) \log\{1 - b_i\} + \log b_i] \quad (8)$$

ここで, 添字 (p) は繰返し回数が p 回目であることを示す. また,

$$\begin{aligned} \xi_n(i, j) &= P\{s_n = i, s_{n+1} = j | l_1^N, \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)}\} \\ \gamma_n(i) &= P\{s_n = i | l_1^N, \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)}\} \end{aligned}$$

である. $\xi_n(i, j), \gamma_n(i)$ はそれぞれ forward-backward アルゴリズム [8] より計算される.

【M-step】 $Q(\mathbf{b}, \mathbf{r} | \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)})$ をパラメータ b_i, r_{ij} について最大化する.

$$\frac{\partial Q(\mathbf{b}, \mathbf{r} | \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)})}{\partial b_i} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q(\mathbf{b}, \mathbf{r} | \mathbf{b}^{(p)}, \mathbf{r}^{(p)})}{\partial r_{ij}} = 0 \quad (10)$$

より,

$$b_i^{(p+1)} = \frac{\sum_{n=1}^N \gamma_n(i)}{\sum_{n=1}^N \gamma_n(i) l_n} \quad \text{for } i = 1, \dots, R \quad (11)$$

$$r_{ij}^{(p+1)} = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \xi_n(i, j)}{\sum_{n=1}^{N-1} \gamma_n(i)} \quad \text{for } i, j = 1, \dots, R \quad (12)$$

パラメータが収束するまで E-step, M-step を繰り返す. パラメータ収束後, 式 (4), (5) を用いて MMGP パラメータから MMPP パラメータへ逆変換する.

提案法は従来法 [1] で必要とする行列の固有値や数値積分等の複雑な計算を必要とせず, forward-backward アルゴリズムによる簡単な計算のみで実行が可能である. また, 提案法は従来法 [2] よりも観測データ量や, 状態遷移が起こるかどうかを調べる回数が少ないため, 少ない計算量, メモリ消費量で実行が可能である.

5. シミュレーション結果と考察

MMPP パラメータ推定のシミュレーション結果に

ついて述べる．シミュレーションでは，まずパラメータ真値を定めることにより真の MMPP を定め，その MMPP から発生する事象の到着時間間隔が与えられているとする．この事象の到着時間間隔を観測データとして用い，提案法，Rydén による MMPP パラメータ推定法（従来法 [1]），Deng による MMPP パラメータ推定法（従来法 [2]）を用いてパラメータ推定を行った．そして推定精度，実行時間の比較を行った．推定精度の比較には，MMPP パラメータ推定結果をトラヒック制御に応用するという観点から，MC（Monte Carlo）法によるセル廃棄率シミュレーションを行い，セル廃棄率特性での比較を行った．

5.1 シミュレーションにおける EM アルゴリズムの条件

シミュレーションにおける EM アルゴリズムの実行の条件について述べる．まず，EM アルゴリズムは繰返しアルゴリズムであるため，パラメータの初期値を必要とする．今回のシミュレーションでは初期値を k-means クラスタリング法 [2] を用いて決定した．

また，EM アルゴリズムの終了条件を以下のように定める．

$$\frac{|b^{(p)} - b^{(p+1)}|}{b^{(p)}} \leq 10^{-5} \quad (13)$$

$$\frac{|r^{(p)} - r^{(p+1)}|}{r^{(p)}} \leq 10^{-5} \quad (14)$$

これら二つの式を満たすときに EM アルゴリズムを終了する．

5.2 シミュレーション結果

5.2.1 case 1

シミュレーション条件を表 1 に示す．状態数は既知とし，パラメータ真値を表 1 中に示す値として真の MMPP を定め，その MMPP から発生する事象の到着時間間隔 10,000 個を観測データとして用いて MMPP パラメータ推定を行った．提案法，従来法 [2] で用いるタイムスロット h は，1 タイムスロット中に二つ以

表 1 シミュレーション条件 (case 1)
Table 1 Condition of simulation (case 1).

状態数	2
観測データ数	10,000
提案法，従来法 [2] で用いるタイムスロット h	0.001
λ_1	10.0
λ_2	1.0
σ_{12}	1.0
σ_{21}	0.1

上の事象の到着がないように小さな値を用いなければならないが，あまりに小さな値の h を用いると，従来法 [2] の観測データ量が膨大に増えてしまうため，計算が現実的でない．そこで推定精度が変わらない範囲で，できるだけ大きな h を用いる．case 1 では $h = 0.001$ とした．

パラメータ推定結果を表 2 に示す．推定結果を比較すると，提案法の λ_1 の推定値に推定誤差があるものの，ほぼ真値に近い値に収束している．従来法 [1]，従来法 [2] についてもほぼ真値に近い値に収束していることが確認できる．

次に MC 法を用いたセル廃棄率シミュレーションによるセル廃棄率特性での推定精度の評価を行う．真値及びそれぞれの方法による推定値をサービス時間で正規化し，1 セルのサービス時間を単位時間とする．ここで，正規化に用いたサービス時間を 0.2 とする．そして，その正規化した真値，推定値より各々 MMPP を生成し，セル廃棄率シミュレーションを行った．ここでシミュレーション回数を 1×10^6 とする．また真値，各推定値における平均到着率 $\bar{\lambda}$ を表 3 に示す．ここで $\bar{\lambda}$ は次式より得られる．

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 \sigma_{21} + \lambda_2 \sigma_{12}}{\sigma_{12} + \sigma_{21}} \quad (15)$$

セル廃棄率シミュレーション結果を図 3 に示す．図 3 において，TRUE は真値，PROP，CONV1，CONV2 はそれぞれ，提案法，従来法 [1]，従来法 [2] による推定値を表す．結果を比較すると，三つの方法ともセル廃棄率特性は真値に近い値が得られていることがわかる．そして，提案法は安全側の評価となっているのに対し，従来法 [1]，従来法 [2] は危険側の評価となっている．

次に実行時間の比較を行う．シミュレーションは並列

表 2 パラメータ推定値の比較 (case 1)
Table 2 Comparison of estimated parameter values (case 1).

	真値	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
λ_1	10.0	10.65	9.77	9.71
λ_2	1.0	1.098	1.005	1.004
σ_{12}	1.0	0.961	0.942	0.941
σ_{21}	0.1	0.0847	0.104	0.104

表 3 真値，各推定値における平均到着率 $\bar{\lambda}$ (case 1)
Table 3 True value and estimated values for the mean arrival rate $\bar{\lambda}$ (case 1).

	真値	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
平均到着率 $\bar{\lambda}$	0.364	0.374	0.375	0.374

計算機 SGI Origin 2000, 8GB メモリ, 100GB ディスク, 16 CPUs という環境で行った. 実行時間の比較を表 4 に示す. 結果を比較すると, 提案法は従来法 [1] の実行時間の約 1/7, 従来法 [2] の実行時間の約 1/115 で推定を行っており, 提案法が従来法と比較して非常に高速にパラメータ推定を実行していることが確認できる.

5.2.2 case 2

シミュレーション条件を表 5 に示す. case 2 では $\lambda_2 = 0$, すなわち状態 2 に事象が到着しないという場合のパラメータ推定を行う.

パラメータ推定結果を表 6 に示す. 表 6 の λ_2 の推定結果を比較すると, 従来法 [1] が 0.000077, 従来法 [2] が 0.000071 と 0 に近い小さな値であるのに対

し, 提案法では 0.091 と相対的に大きめの値に収束している. 提案法では事象の到着時にのみ状態遷移が起こると考えているため, 到着率の真値が 0 に近いと, 状態遷移が起こった時間を正しく推定するのが困難となる. このことは式 (5) の右辺の分母に λ_i があることからわかる. そして, 到着した事象がどちらの状態から発生した事象なのかという推定を正確に行うことが従来法よりも難しい. そのため状態 2 の到着率が 0 の場合の推定では, 状態 1 での到着を状態 2 での到着であると誤って判断してしまうため, λ_2 の推定に誤差が生じている. しかし, 以下に示すセル廃棄率での推定精度の評価では, 提案法のセル廃棄率特性は真値と近い値が得られているため, λ_2 の推定誤差は, セル廃棄率特性に大きな影響を与えていないことがわかる.

そこで, セル廃棄率による評価を行う. サービス時間を 0.4 とし, シミュレーション回数を 1×10^6 とする. また, 真値, 各推定値における平均到着率 $\bar{\lambda}$ を表 7 に示す.

セル廃棄率シミュレーション結果を図 4 に示す. 結果を比較すると, 提案法, 従来法 [1], 従来法 [2] のセル廃棄率特性は, 真値に対してやや危険側の評価であるが, 真値と近い特性となっている. このことから, 提案法の λ_2 の推定での推定誤差は, セル廃棄率特性に大きな影響を与えていないことがわかる.

次に実行時間の比較を行う. 実行時間の比較を表 8 に示す. 結果を比較すると, 提案法は従来法 [1] の実行時間の約 1/8, 従来法 [2] の実行時間の約 1/160 で推定を行っており, 提案法が従来法と比較して非常に高速にパラメータ推定を実行していることが確認できる.

式 (5) では, $\lambda_i \geq \sigma_{ij}$ である必要があるが, 以上のように $\lambda_i < \sigma_{ij}$ の場合でも, MMGP に基づく推定

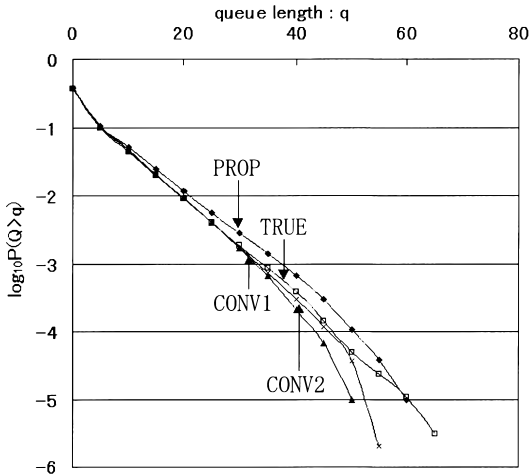


図 3 MC シミュレーションによるセル廃棄率推定値 (case 1)
Fig. 3 Estimated values for cell loss rate by MC simulation (case 1).

表 4 実行時間の比較 (case 1)
Table 4 Comparison of computation time (case 1).

	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
実行時間	9 s	65 s	1,051 s

表 5 シミュレーション条件 (case 2)
Table 5 Condition of simulation (case 2).

状態数	2
観測データ数	10,000
タイムスロット h	0.001
λ_1	10.0
λ_2	0.0
σ_{12}	1.0
σ_{21}	0.1

表 6 パラメータ推定値の比較 (case 2)
Table 6 Comparison of estimated parameter values (case 2).

	真値	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
λ_1	10.0	10.71	9.72	9.67
λ_2	0.0	0.091	0.000077	0.000071
σ_{12}	1.0	1.065	1.033	1.033
σ_{21}	0.1	0.083	0.101	0.102

表 7 真値, 各推定値における平均到着率 $\bar{\lambda}$ (case 2)
Table 7 True value and estimated values for the mean arrival rate $\bar{\lambda}$ (case 2).

	真値	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
平均到着率 $\bar{\lambda}$	0.364	0.347	0.348	0.347

は可能で、真値に近いセル廃棄率特性が得られることを確認した。

5.2.3 case 3

シミュレーション条件を表 9 に示す。case 3 では 3 状態でのパラメータ推定を行う。パラメータ推定結果を表 10 に示す。

表 10 の推定結果を比較すると、提案法は $\lambda_1, \lambda_3, \sigma_{31}$ で推定誤差がみられ、また従来法では σ_{13} で推定誤差が大きくなっている。提案法、従来法ともに推定誤差があるものの、ほぼ真値に近い値に収束している。

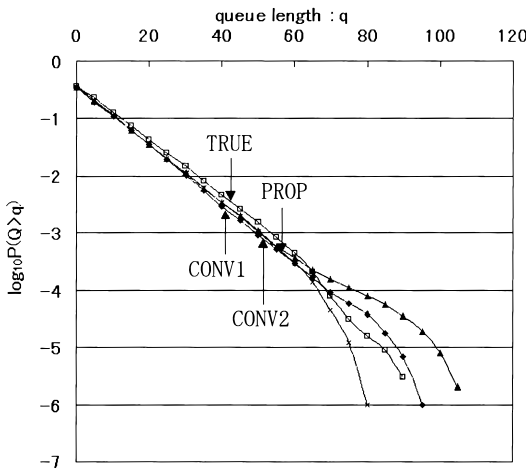


図 4 MC シミュレーションによるセル廃棄率推定値 (case 2)

Fig. 4 Estimated values for cell loss rate by MC simulation (case 2).

表 8 実行時間の比較 (case 2)

Table 8 Comparison of computation time (case 2).

	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
実行時間	10 s	85 s	1,652 s

表 9 シミュレーション条件 (case 3)

Table 9 Condition of simulation (case 3).

状態数	3
観測データ数	10,000
タイムスロット h	0.0001
λ_1	100.0
λ_2	50.0
λ_3	10.0
σ_{12}	5.0
σ_{13}	3.0
σ_{21}	3.0
σ_{23}	2.0
σ_{31}	2.0
σ_{32}	1.0

次にセル廃棄率による評価を行う。サービス時間を 0.01 とし、シミュレーション回数を 1×10^6 とする。また、真値、各推定値における平均到着率 $\bar{\lambda}$ を表 11 に示す。ここで、3 状態 MMPP の平均到着率 $\bar{\lambda}$ は次式で求められる。

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 \sigma_2 \sigma_3 + \lambda_2 \sigma_1 \sigma_3 + \lambda_3 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3} \quad (16)$$

ここで、 $\sigma_i = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \sigma_{ij}$ である。

セル廃棄率シミュレーション結果を図 5 に示す。結果を比較すると、提案法のセル廃棄率特性は真値に対して安全側の評価となっているのに対し、従来法 [1]、従来法 [2] のセル廃棄率特性は、真値に対して危険側の評価となっている。

次に実行時間の比較を行う。実行時間の比較を表 12 に示す。パラメータ数が多いため、すべてのパラメータが収束条件を満たすまでに多くの繰返し回数を必要とし、それに伴って 2 状態のときよりも実行時間が長くなっている。しかし、提案法は従来法 [1] の実行時間の約 1/40、従来法 [2] の実行時間の約 1/70 で推定を行っており、提案法が従来法と比較して非常に高速にパラメータ推定を実行していることが確認できる。

上記 case 1 ~ 3 に加えて、更に表 13 に示すパラメータをもつ case 4 ~ 6 の 2 状態 MMPP について考察する。case 1 ~ 6 における実行時間と推定精度の比較を表 14 に示す。表 14 において、時間比 1 及び時間比 2 は、それぞれ、提案法の実行時間の従来法 [1] 及び従来法 [2] の実行時間に対する比を表す。また、設

表 10 パラメータ推定値の比較 (case 3)

Table 10 Comparison of estimated parameter values (case 3).

	真値	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
λ_1	100.0	112.32	102.71	102.41
λ_2	50.0	53.44	48.83	48.66
λ_3	10.0	12.77	9.96	9.92
σ_{12}	5.0	7.75	7.25	7.33
σ_{13}	3.0	2.65	2.22	2.21
σ_{21}	3.0	2.42	3.19	3.22
σ_{23}	2.0	2.1	1.9	1.91
σ_{31}	2.0	1.35	1.75	1.76
σ_{32}	1.0	1.39	1.2	1.19

表 11 真値、各推定値における平均到着率 $\bar{\lambda}$ (case 3)
Table 11 True value and estimated values for the mean arrival rate $\bar{\lambda}$ (case 3).

	真値	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
平均到着率 $\bar{\lambda}$	0.392	0.401	0.371	0.369

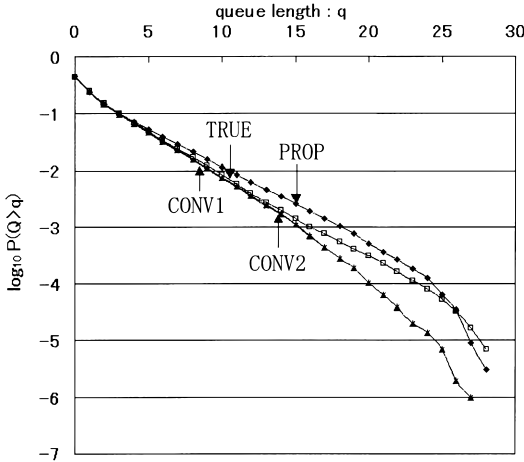


図 5 MC シミュレーションによるセル廃棄率推定値 (case 3)

Fig. 5 Estimated values for cell loss rate by MC simulation (case 3).

表 12 実行時間の比較 (case 3)

Table 12 Comparison of computation time (case 3).

	提案法	従来法 [1]	従来法 [2]
実行時間	51 s	2,092 s	3,666 s

表 13 シミュレーション条件 (case 4 ~ 6)

Table 13 Condition of simulation (case 4 ~ 6).

	case 4	case 5	case 6
λ_1	15.0	10.0	100.0
λ_2	2.0	2.0	10.0
σ_{12}	1.0	3.0	10.0
σ_{21}	0.1	0.5	1.0

表 14 実行時間と設計誤差の比較

Table 14 Comparison of computation time and design error.

	時間比 1	時間比 2	設計誤差
case 1	1/7	1/115	10%
case 2	1/8	1/160	-7%
case 3	1/40	1/70	11%
case 4	1/11	1/85	7%
case 5	1/24	1/75	11%
case 6	1/7	1/93	15%

計誤差はセル廃棄率 10^{-3} におけるキュー長 q の提案法による推定値と真値との誤差を示す。すなわち、提案法による推定値を \hat{q} とし真値を q_0 とすると、設計誤差 $= (\hat{q} - q_0) / q_0 \times 100[\%]$ である。

計算の実行時間比についてはどの場合も 7 分の 1 以下となっている。提案法及び従来法 [2] において最も計算時間がかかる部分は forward-backward アルゴリ

ズムによる状態滞在確率と状態遷移確率の計算である。観測データ数を N とし、MMPP の状態数を R とすると forward-backward アルゴリズムの計算量は $O(NR^2)$ である。提案法及び従来法 [2] の観測データ数を、それぞれ、 N, N' とすると、4.2 で述べたように、典型的な場合に $N' = 500N$ である。このことから、従来法 [2] が提案法よりも実行時間がかかることがわかる。状態数 R に関する計算量は提案法、従来法 [2] とともに同程度である。一方、従来法 [1] において最も計算時間がかかるのは、E-step での状態遷移回数と状態占有時間の期待値を計算するための数値積分と行列計算である。観測時間を T 、MMPP の状態数を R とすると、この部分の計算量は $O(TR^3)$ である。提案法の観測データ数を N とすると、典型的な場合に $T = 2N$ 程度であるが、毎回の E-step において複雑な被積分関数に対する数値積分の計算に時間がかかり、結果として表 14 の時間比となっている。状態数 R に関する提案法の計算量は従来法 [1], [2] の計算量以下である。

また、設計誤差を見ると、6 例中 5 例において安全側であることがわかる。また、危険側となった case 2 でも図 4 からわかるように、従来法 [1], [2] は提案法よりも更に危険側の評価を与えている。また、表 14 より、設計誤差の絶対値は状態数 R に依存しないと考えられる。

6. む す び

EM アルゴリズムによる MMPP パラメータ推定において、新たに MMGP モデルを提案し、MMPP から MMGP へのモデル変換を行って EM アルゴリズムを適用するパラメータ推定法を提案した。シミュレーションによる従来法 [1], 従来法 [2] との比較を行った結果、提案法の実行速度は従来法よりも高速であり、また、セル廃棄率に対する推定精度は従来法と同程度であることを確認した。

セル廃棄率特性に関して、本論文で示した例において提案法の特長は真値に対して安全側の評価となる場合が多かった。提案法では、事象の到着時にのみ状態遷移が起こると考えているため、状態遷移が起こった時間の推定に誤差が生じる。実験によると、その誤差によって到着率が大きめの値として推定され、その結果、セル廃棄率特性では、真値のセル廃棄率特性よりも安全側の評価となることが多くなったと考えられる。

実行時間に関して、提案法は、従来法 [1] で必要と

する行列の固有値や数値積分等の複雑な計算を行う必要がなく、また従来法 [2] よりも少ない計算量、メモリ消費量で計算を行うことができるため、実行時間を短縮できたものと考えられる。

文 献

- [1] T. Rydén, "An EM algorithm for estimation in Markov modulated Poisson processes," Computational Statistics & Data Analysis, vol.21, pp.431-447, 1996.
- [2] L. Deng and J.W. Mark, "Parameter estimation for Markov modulated Poisson processes via the EM algorithm with time discretization," Telecommun. Syst., vol.1, pp.321-338, 1993.
- [3] H. Heffes and D.M. Lucantoni, "A Markov Modulated Characterization of Packetized Voice and Data Traffic and Related Statistical Multiplexer Performance," IEEE J. Selected Areas Commun., vol.sac-4, no.6, pp.856-868, 1986.
- [4] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin, "Maximum Likelihood from Incomplete data via the EM Algorithm," J. Royal Statistical Society, vol. B39, pp.1-22, 1977.
- [5] 赤穂昭太郎, "EM アルゴリズムの幾何学," 情報処理, vol.37, no.1, pp.43-51, 1996.
- [6] 宮川雅巳, "EM アルゴリズムとその周辺," 応用統計学, vol.16, no.1, pp.1-21, 1987.
- [7] M.A. Tanner, Tools for Statistical Inference; Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Function, Springer, 1996.
- [8] L.R. Rabiner, "A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition," Proc. IEEE, vol.77, no.2, pp.257-286, 1989.
- [9] 中川聖一, 確率モデルによる音声認識, 電子情報通信学会, 1988.
- [10] K.S. Meier-Hellstern, "A fitting algorithm for Markov-modulated Poisson processes having two arrival rates," European J. Operational Research, vol.29, pp.370-377, 1987.
- [11] W. Fischer and K. Meier-Hellstern, "The Markov-modulated Poisson process (MMPP) cookbook," Performance Evaluation, vol.18, pp.149-171, 1992.
- [12] 小川耕司, 中川健治, "MMPP/D/1 キューイングにおける最適 IS シミュレーション分布," 信学論 (B-1), vol.J80-B-1, no.2, pp.64-73, Feb. 1997.
- [13] 山田雅裕, 中川健治, "EM アルゴリズムによる MMPP パラメータ推定," 情報理論とその応用シンポジウム講演論文集, pp.889-892, Nov. 1999.
- [14] 山田雅裕, "EM アルゴリズムによる MMPP パラメータ推定について," 長岡技科大大学院修士論文, 2000.

(平成 12 年 3 月 10 日受付, 9 月 22 日再受付)



山田 雅裕 (正員)

平 10 長岡技科大・工・電気・電子システム卒・平 12 同大大学院修士課程了・同年(株)エフ・ディー・シー入社。



中川 健治 (正員)

昭 55 東工大・理・数学卒・昭 60 同大大学院博士課程満期退学・昭 60 NTT 研究所入社・平 4 長岡技科大・工・助教授・待ち行列理論, ネットワーク特性評価, 大偏差理論等の研究に従事・理博・IEEE, 情報理論とその応用学会, 日本数学会各会員。