論文

バーストトラヒックを入力とするネットワークにおける平均系内時間の近似解析

米倉　誠[†]　中川　健治[††a)]　恩田　和幸[†††]　斎藤　茂[††††]

Approximation Analysis for the Average Sojourn Time in a Network with Bursty Input Traffic

Makoto YONEKURA[†], Kenji NAKAGAWA[††a)], Kazuyuki ONDA[†††], and Shigeru SAITO[††††]

あらまし　待ち行列からの退去過程は一般に到着過程よりも複雑になるため，他ノードからの退去過程が到着過程となるネットワーク内の各ノードの解析は一般に困難である．従来は解析を容易にするため，ネットワークを Jackson 網と仮定して，すなわち，到着をポアソン過程，サービスを指数サービスと仮定してネットワークを解析・設計していた．しかし，ポアソン過程では実際のパケットネットワークにおけるパケットトラヒックを表現するには不十分である．本研究では，バースト性を表現できる MMPP（Markov Modulated Poisson Process）を到着過程とし，指数サーバ多段系列の各ノードでの平均系内時間の近似値を得る方法を提案する．平均系内時間の計算のために，各ノードからの退去過程を，MMPP を含みより一般的なトラヒックモデルである MAP（Markovian Arrival Process）によって表現し，更にそれを MMPP で近似する．これによって，全ノードにおいて同じアルゴリズムで平均系内時間を計算できる．提案法による平均系内時間の近似値とシミュレーション値を比較して，提案法による近似値が安全側で精度良い値であることを示す．

キーワード　待ち行列，平均系内時間，MMPP，MAP，退去過程

1. まえがき

通信ネットワーク内のノードは待ち行列でモデル化され解析される．ネットワーク内では，あるノードからの退去過程が他ノードへの到着過程となるが，一般に待ち行列からの退去過程は到着過程よりも複雑になるために，ネットワーク内の一つのノードの解析でさえ困難になる．ネットワークを Jackson 網と仮定して，すなわち，到着をポアソン過程，サービスを指数サービスと仮定して解析すれば，ネットワークの特性値を得ることは容易であるが，ポアソン過程では実際に通信ネットワーク内を流れるトラヒックを表現するのには不十分である．

本研究では，到着過程を 2 状態 MMPP（Markov Modulated Poisson Process）として，各ノードでのサービスを指数サービスとする直列のネットワークを考え，各ノードでの平均系内時間の近似値を得ることを目的とする．対象とするモデルを図 1 に示す．ノード n $(n=1,\ldots,L)$ はサイズ無限大のバッファとサービス率 μ_n の指数サーバからなる．

本研究は，パケット通信網のネットワークリソースの最適配分法の設計を目的として行われている．パケットトラヒックのバースト性を考慮して，バースト性をもつ基本的なモデルである MMPP をトラヒックモデルとした．また，サービスは必ずしも指数サービスでよく表現できるとは限らないが，パケット長は一定でもない．そこで，近似的なサービスモデルとして解析的に取り扱いやすい指数サービスを仮定した．直

[†] 松下電送システム株式会社，東京都
Matsushita Graphic Communication Systems, Inc., Meguro-ku, Tokyo, 153–8687 Japan
[††] 長岡技術科学大学，長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, Nagaoka-shi, 940–2188 Japan
[†††] NTT アドバンステクノロジ株式会社，武蔵野市
NTT Advance Technology Co. Ltd., 2–4–15 Nakamachi, Musashino-shi, 180–0006 Japan
[††††] ATR 適応コミュニケーション研究所，京都府
ATR Adaptive Communications Research Labs., Seika-cho, Souraku-gun, Kyoto-fu, 619–0288 Japan
a) E-mail: nakagawa@nagaokaut.ac.jp

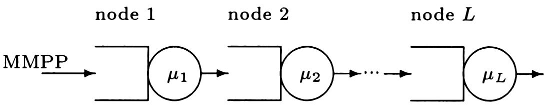

図 1　ネットワークモデル
Fig. 1　Network model.

列ネットワークを仮定する理由は，1 本 1 本のコネクションの end-to-end の遅延時間を調べることを目的としているためである．

ノード 1 への入力は 2 状態 MMPP である．MMPP は MAP（Markovian Arrival Process）の特別な場合とみなすことができ，MMPP を MAP として表現することによってノード 1 を 2 状態 MAP を入力とする MAP/M/1 として解析することができる．MAP/M/1 の平均系内時間の解析は文献 [1] に示されている．その方法は，MAP のパラメータ行列を直接用いた行列の繰返し計算を主たる計算としており，アルゴリズムが簡単である．しかし，我々の問題にこの解析法を直接適用するのは計算量の点から困難である．なぜならば，各ノードのバッファサイズを K として近似すると，ノード n $(n=1,\dots,L)$ への入力となる MAP の状態数は $2(K+1)^{n-1}$ となってしまうからである．後に述べるように，$K=20$，$L=10$ の場合を扱うので，この場合には，ノード $L=10$ での状態数は 2×21^9 となってしまう．

そこで，本研究では，各ノードからの退去過程をノード 1 への到着過程と同じモデル，すなわち 2 状態 MMPP で近似し次ノードを解析する．それによって，すべてのノードにおいて同じ計算量で平均系内時間を計算することができる．そして，実際にシミュレーション値と比較して，提案法による近似値が安全側の精度の良い値であることを示す．

2. で本論文で扱うトラヒックモデルの説明を行う．**3.**，**4.** では文献 [1] による MAP/M/1 の平均系内時間の計算アルゴリズムを紹介する．**5.** で提案する近似法を説明し，**6.** で数値例を示し，**7.** でそれに対する考察を行う．

2. 到着過程について

2.1 MMPP

MMPP（Markov Modulated Poisson Process）は連続時間マルコフ連鎖の各状態がそれぞれ一つのポアソン過程に対応し，そのポアソン過程に従って到着が起こる．本研究で到着過程として用いる 2 状態 MMPP は 4 パラメータをもち，そのパラメータは，状態 0，1 における到着率 λ_0，λ_1 と状態 0，1 から他方の状態への遷移率 q_0，q_1 である．

2.2 MAP

MAP（Markovian Arrival Process）は MMPP と同様に，連続時間マルコフ連鎖の各状態がそれぞれ一つのポアソン過程に対応している．MAP は状態遷移に到着を伴うことを許すモデルである [2]．到着を伴わない遷移率行列 C と，到着を伴う遷移率行列 D が MAP のパラメータとなる．これら C と D を MAP のパラメータ行列という．MMPP では到着を伴う状態遷移は考えないが，到着時には状態が変化しないと考える，あるいは，同じ状態に遷移すると考えれば MMPP を MAP とみなすことができる．こう考えて 2 状態 MMPP を MAP として表現すると，パラメータ行列 C，D は次のようになる．

$$C=\begin{bmatrix} -q_0-\lambda_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1-\lambda_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. MAP/M/1 の解析

本研究で各ノードにおける平均系内時間の計算のために利用する MAP/M/1 の解析を示す（文献 [1] 参照）．

3.1 MAP/M/1 の定常分布

パラメータ行列 C，D をもつ MAP を到着過程とし，サービス率 μ をもつ指数サービスの待ち行列 MAP/M/1 を考える．MAP の状態数を d とする．C，D はともに $d\times d$ 行列である．MAP/M/1 のキュー長を N とし，MAP の状態を S とすると，組 (N,S) がなす連続時間マルコフ連鎖の遷移率行列 Q は

$$Q=\begin{bmatrix} C & D & 0 & 0 & \cdots \\ A & B & D & 0 & \cdots \\ 0 & A & B & D & \cdots \\ 0 & 0 & A & B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3}$$

によって与えられる．ただし，$A=\mu I$，I は $d\times d$ 単位行列，$B=C-A$ である．

MAP/M/1 の定常分布 x は $xQ=0$，$x\mathbf{1}=1$ の解

である．ここで，$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 である列ベクトルを表す．定常分布 x は

$$x = [x_0, x_0R, x_0R^2, \ldots] \tag{4}$$

という表示をもつ．ここで R は，

$$\mu R^2 + RB + D = 0 \tag{5}$$

満たす最小非負の行列である．また，x_0 は

$$x_0 = \pi(I - R) \tag{6}$$

と与えられる．ここで，π は入力の MAP の定常分布である．文献 [1] では，R を数値的に得るために，式 (5) を変形して得られる漸化式

$$\left.\begin{array}{l} R_{k+1} = (\mu R_k^2 + D)(-B)^{-1}, \quad R_0 = 0 \\ R = \lim_{k\to\infty} R_k \end{array}\right\} \tag{7}$$

を用いる．

3.2 MAP/M/1 の平均系内時間

MAP/M/1 の平均系内時間 $\bar{W}$ は，MAP/M/1 の平均キュー長 $\bar{N}$ と MAP の平均到着率 λ を用いて，次のリトルの公式 (8) で計算できる．

$$\bar{W} = \bar{N}/\lambda \tag{8}$$

ここで，$\bar{N} = \pi(I - R)^{-1}R\mathbf{1}$，$\lambda = \pi D\mathbf{1}$ と与えられる．

3.3 MAP/M/1 からの退去過程

MAP/M/1 のキュー長 N と状態 S の組 (N, S) を考え，組としての状態遷移を考えることによって MAP/M/1 からの退去過程の遷移率行列を求める．客の退去に注目する．キュー長 N が一つ減少するときが退去であり，N が変化しないかまたは増加のときは退去でない．したがって，式 (3) の遷移率行列 Q を退去を伴わない遷移率行列 U と退去を伴う遷移率行列 V とに分けると以下のようになる．

$$U = \begin{bmatrix} C & D & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & B & D & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & B & D & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$V = Q - U \tag{10}$$

退去過程が次ノードへの到着過程となるので，式 (9) の退去を伴わない遷移率行列 U が次ノードへの到着を伴わない遷移率行列となり，式 (10) の退去を伴う遷移率行列 V が次ノードへの到着を伴う遷移率行列となる．

そこで，**3.1** の MAP/M/1 の定常分布の解析において，$C = U$，$D = V$ として式 (8) によって次ノードでの平均系内時間を求めたいのであるが，この場合，C，D がサイズ無限大の行列であるため漸化式 (7) の繰返し計算を実行することができない．状態数が無限大となるのは，バッファサイズを無限大としているためである．

（注意） 状態数が無限の場合，式 (9)，(10) の遷移率行列をもつ Markov 連鎖を一般には MAP といわないが，本論文では簡単のため状態数無限の MAP という．

4. 有限バッファによる近似

ノード 1 のバッファサイズを有限値 K で近似すれば，ノード 2 への到着過程は $2(K+1)$ 状態の MAP で表現できる．その MAP の到着を伴わない遷移率行列 $\hat{U}$ と，到着を伴う遷移率行列 $\hat{V}$ は下記のように与えられる．

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} C & D & 0 & & & \\ 0 & B & D & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & B & D & 0 \\ & & & 0 & B & D \\ & & & & 0 & \hat{B} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\hat{B} = B + D$$

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ A & 0 & & & \\ 0 & A & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & A & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$\hat{U}$，$\hat{V}$ は $2(K+1) \times 2(K+1)$ 行列である．行列サイズが有限なのでノード 2 を MAP/M/1 として **3.1** の解析法が使える．以降のノードも同様に，ノード n までのバッファサイズを有限で近似すれば，ノード $n+1$ を MAP/M/1 として解析できる．しかし，このような近似では後のノードほど到着過程となる MAP の状態数が大きくなり，ノード L における MAP の状態数は $2(K+1)^{L-1}$ となってしまう．したがって，対象モデルのノード数が多いときに全ノードでこの解析

法を実行するのは計算量の点で困難である．

そこで，退去過程を簡単なモデルで近似することを考える．特に各ノードからの退去過程をノード 1 への到着過程と同じモデルである 2 状態 MMPP で近似すれば，各ノードでの計算アルゴリズムが同じになる．

5. 退去過程の 2 状態 MMPP による近似（提案法）

上記で述べたように，各ノードのバッファサイズを有限値 K で近似するだけでは，各ノードへの到着過程となる MAP の状態数がノード番号に対して $K+1$ のべき乗で増加し，解析が困難になる．そこで本研究では，各ノードからの退去過程を 2 状態 MMPP で近似する方法を提案する．それによってすべてのノードで同一のタイプの待ち行列を解析すればよいことになる．

ノード $n-1$ からの退去過程を 2 状態 MMPP で近似し，その 2 状態 MMPP を MAP とみなしたときのパラメータ行列を C_{n-1}，D_{n-1} とする（図 2 参照）．C_{n-1}，D_{n-1} はともに 2×2 行列である．この MAP を MAP (C_{n-1}, D_{n-1}) と表す．ノード $n-1$ からの退去はノード n への入力となる．そこで，ノード n での待ち行列は MAP (C_{n-1}, D_{n-1})/M/1 となる．**3. 3** で述べたように，MAP/M/1 からの退去過程は式 (9), (10) の U，V をパラメータ行列とする状態数無限の MAP となる．その状態数無限の MAP のパラメータ行列を U_n，V_n と表し，その MAP を MAP (U_n, V_n) と表す．そして，MAP (U_n, V_n) を **4.** の有限バッファによる近似法を用いて近似して得られる $2(K+1)$ 状態 MAP を MAP $(\hat{U}_n, \hat{V}_n)$ と表す．

更に，MAP $(\hat{U}_n, \hat{V}_n)$ を以下に示す方法で 2 状態 MMPP で近似し，それを MAP (C_n, D_n) と表す．

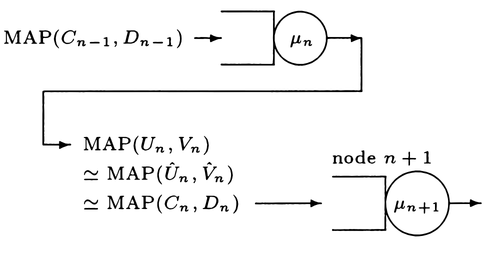

図 2　退去過程の 2 状態 MMPP による近似
Fig. 2　Approximation of the departure process by 2-state MMPP.

C_n，D_n は 2×2 行列である．MAP (C_n, D_n) はノード $n+1$ への入力となる．以下，同様のことを繰り返し行う．

ここで特に，MAP $(\hat{U}_n, \hat{V}_n)$ の遷移率行列 $\hat{U}_n$ と $\hat{V}_n$ を示しておく．これらはともに $2(K+1)\times 2(K+1)$ 行列である．

$$\hat{U}_n = \begin{bmatrix} C_{n-1} & D_{n-1} & 0 & & & & \\ 0 & B_{n-1} & D_{n-1} & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & B_{n-1} & D_{n-1} & 0 & \\ & & & 0 & B_{n-1} & D_{n-1} & \\ & & & & 0 & \hat{B}_{n-1} & \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$B_{n-1} = C_{n-1} - \mu_n I,\ \hat{B}_{n-1} = B_{n-1} + D_{n-1}$$

$$\hat{V}_n = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \mu_n I & 0 & & & \\ 0 & \mu_n I & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \mu_n I & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

5.1 近似のための条件

さて，Bean [3] によると，一般に二つの MAP, MAP (U_n, V_n) と MAP (C_n, D_n) が確率過程として一致するための必要十分条件は，任意の自然数 k と任意の実数 $t_1, \ldots, t_k \in [0, \infty)$ に対して次式が成り立つことである．

$$\frac{x e^{U_n t_1} V_n e^{U_n t_2} \cdots V_n e^{U_n t_k} V_n \mathbf{1}}{x e^{U_n t_1} V_n e^{U_n t_2} \cdots V_n e^{U_n t_k} \mathbf{1}} = \frac{\psi e^{C_n t_1} D_n e^{C_n t_2} \cdots D_n e^{C_n t_k} D_n \mathbf{1}}{\psi e^{C_n t_1} D_n e^{C_n t_2} \cdots D_n e^{C_n t_k} \mathbf{1}} \tag{15}$$

ここで，x は MAP (U_n, V_n) の定常分布であり，ψ は MAP (C_n, D_n) の定常分布である．式 (15) の左辺は MAP (U_n, V_n) における過去の履歴を条件とする時刻 $T = t_1 + \cdots + t_k$ での到着率を表し，式 (15) の右辺は MAP (C_n, D_n) における同様の値を表す．

式 (15) が任意の k と任意の $t_1, \ldots, t_k \in [0, \infty)$ に対して成り立てば MAP (U_n, V_n) を MAP (C_n, D_n) で完全に表現できたことになるのだが，行列 U_n，V_n はサイズ無限大で行列 C_n，D_n は 2×2 なのでそれは期待できない．そこで，式 (15) の k や $t_1, \ldots, t_k$ を特別な値に限定したものを C_n，D_n が満たすべき条件とする．

以上の考察に基づき，C_n，D_n を決定するための条件として下記の条件 1〜4 を提案する．

条件 1：$xV_n\mathbf{1} = \psi D_n\mathbf{1}$

条件 2：$xV_n^2\mathbf{1} = \psi D_n^2\mathbf{1}$

条件 3：$g(\hat{U}_n) = g(C_n)$

条件 4：$\bar{W}_1 = \bar{W}_2$

ここで，$\hat{U}_n$ は十分大きな K により式 (13) で与えられる行列であり，$g(\hat{U}_n)$，$g(C_n)$ は，それぞれ，$\hat{U}_n$，C_n の最大固有値を表す．また，$\bar{W}_1$ は MAP $(\hat{U}_n, \hat{V}_n)$ を到着過程とし，次ノードのサービス率 μ_{n+1} をもつ指数サーバをサーバとする待ち行列の平均系内時間を表し，$\bar{W}_2$ は MAP (C_n, D_n) を到着とする同様の待ち行列の平均系内時間を表す．

提案した条件 1〜4 について詳細に検討する．

5.2 条件 1 について

条件 1 は式 (15) で $k=1$，$t_1=0$ として得られる．このとき条件 1 の左辺は，MAP (U_n, V_n) の平均到着率を表し，右辺は MAP (C_n, D_n) の平均到着率を表す．条件 1 はこれらが等しいことを要請する．

条件 1 の左辺はサイズ無限大の行列 V_n を含んでいるが，**3.1** における 2×2 行列 R を用いて次式 (16) で計算できる．

$$xV_n\mathbf{1} = \mu\pi R\mathbf{1} \tag{16}$$

なぜならば，$m \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} & xV_n^m\mathbf{1} \\ &= xV_nV_n^{m-1}\mathbf{1} \\ &= [\pi(I-R), \pi(I-R)R, \cdots] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} V_n^{m-1}\mathbf{1} \\ &= \mu[\pi(I-R)R, \pi(I-R)R^2, \cdots]V_n^{m-1}\mathbf{1} \\ &= \mu^m[\pi(I-R)R^m, \pi(I-R)R^{m+1}, \cdots]\mathbf{1} \\ &= \mu^m \sum_{k=0}^{\infty} \pi(I-R)R^{m+k}\mathbf{1} \\ &= \mu^m \pi R^m \mathbf{1} \end{aligned} \tag{17}$$

となるからである．

5.3 条件 2 について

条件 2 は式 (15) で $k=2$，$t_1=t_2=0$ とし，条件 1 を適用して得られる．条件 2 の左辺は，条件 1 と同様に式 (17) より次のように計算できる．

$$xV_n^2\mathbf{1} = \mu^2\pi R^2\mathbf{1} \tag{18}$$

5.4 条件 3 について

条件 3 を考えるにあたって，まず，式 (13) において

$$g(\hat{U}_n) = g(C_{n-1}) \tag{19}$$

であること，すなわち，$\hat{U}_n$ の最大固有値と C_{n-1} の最大固有値が等しいことを示す．式 (13) より，$\hat{U}_n$ の固有方程式は，

$$\begin{aligned} & |\hat{U}_n - \theta I'| \\ &\quad = |C_{n-1} - \theta I||B_{n-1} - \theta I|^{K-1}|\hat{B}_{n-1} - \theta I| \end{aligned} \tag{20}$$

となる．ここで，I' は $2(K+1)\times 2(K+1)$ 単位行列，I は 2×2 単位行列である．式 (20) より，$\hat{U}_n$ の最大固有値 $g(\hat{U}_n)$ は C_{n-1}，B_{n-1}，$\hat{B}_{n-1}$ の最大固有値 $g(C_{n-1})$，$g(B_{n-1})$，$g(\hat{B}_{n-1})$ のいずれかである．実際，これらのなかで $g(C_{n-1})$ が最大であることが以下のようにしてわかる．

まず，$B_{n-1} = C_{n-1} - \mu_n I$ より $g(B_{n-1}) = g(C_{n-1}) - \mu_n$ であるから $g(B_{n-1}) < g(C_{n-1})$ である．

次に，$g(\hat{B}_{n-1}) < g(C_{n-1})$ を示す．$\hat{B}_{n-1} = C_{n-1} + D_{n-1} - \mu_n I$ より $g(\hat{B}_{n-1}) = -\mu_n$ である．$\theta = g(C_{n-1})$ とおいて $-\mu_n < \theta$ を示す．C_{n-1} を式 (1) のように表すと，固有値 θ が満たすべき方程式は，MAP (C_{n-1}, D_{n-1}) の平均到着率 λ が $\lambda = (\lambda_0 q_1 + \lambda_1 q_0)/(q_0+q_1)$ であることに注意して，

$$\begin{aligned} & \theta^2 + (\lambda_0 + \lambda_1 + q_0 + q_1)\theta + \lambda_0\lambda_1 + \lambda(q_0+q_1) \\ &\quad = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

となる．式 (21) の左辺を θ の 2 次関数とみて $f(\theta)$ とおく．$f(-\lambda) \leq 0$ であることがわかるから，式 (21) の大きいほうの解，すなわち $\theta = g(C_{n-1})$ は $-\lambda \leq \theta$ を満たす．待ち行列の安定条件 $\lambda < \mu_n$ より，結局，$g(\hat{B}_{n-1}) = -\mu_n < -\lambda \leq g(C_{n-1})$ を得る．

以上から，$g(\hat{U}_n) = g(C_{n-1})$ であることがわかった．いいかえると，到着を伴わない遷移率行列の最大固有値は各ノードの入力と出力で不変となる．

そこで，条件 3 を得るために，式 (15) の左辺の U_n，V_n を $\hat{U}_n$，$\hat{V}_n$ で置き換え，$k=1$ の場合を考える．すなわち，

$$\frac{\hat{x}e^{\hat{U}_n t}\hat{V}_n\mathbf{1}}{\hat{x}e^{\hat{U}_n t}\mathbf{1}} = \frac{\psi e^{C_n t}D_n\mathbf{1}}{\psi e^{C_n t}\mathbf{1}} \tag{22}$$

である．ここで，$\hat{x}$ は MAP $(\hat{U}_n, \hat{V}_n)$ の定常分布である．また，簡単のため $t = t_1$ とおいた．

$(\hat{U}_n + \hat{V}_n)\mathbf{1} = 0$，$(C_n + D_n)\mathbf{1} = 0$ より式 (22) は

$$\frac{\hat{x}e^{\hat{U}_n t}\hat{U}_n\mathbf{1}}{\hat{x}e^{\hat{U}_n t}\mathbf{1}} = \frac{\psi e^{C_n t}C_n\mathbf{1}}{\psi e^{C_n t}\mathbf{1}} \tag{23}$$

となる．式 (23) において，左辺の $\hat{U}_n$ の中に含まれる C_{n-1} 及び右辺の C_n がともに既約であるとする．ここで，式 (1) の形の行列 C_{n-1} が既約であるとは，ある正数 $\alpha > 0$ に対して $C_{n-1} + \alpha I$ が既約であることである．C_n についても同様．

式 (23) の右辺について，付録の定理より

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi e^{C_n t}C_n\mathbf{1}}{\psi e^{C_n t}\mathbf{1}} = g(C_n) \tag{24}$$

を得る．次に，式 (23) の左辺を考える．式 (19) 及び C_{n-1} が既約であるとの仮定から，$g(\hat{U}_n)$ は $\hat{U}_n$ の重複度 1 の最大固有値である．そして，$g(C_{n-1})$ に対する正の固有列ベクトル $x_1 > 0$ をとって $\hat{U}_n$ の固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

を考えれば，定理の証明と同様の議論によって

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\hat{x}e^{\hat{U}_n t}\hat{U}_n\mathbf{1}}{\hat{x}e^{\hat{U}_n t}\mathbf{1}} = g(\hat{U}_n) \tag{26}$$

を得る．式 (23)，(24)，(26) より $g(\hat{U}_n) = g(C_n)$ となる．これが条件 3 である．

条件 3 及び式 (19) より

$$g(C_n) = g(C_{n-1}) \tag{27}$$

となり，2 状態 MMPP の到着を伴わない遷移率行列の最大固有値が，ノード 1 からノード L まで不変に保たれる．

5.5 条件 4 について

本研究では各ノードでの平均系内時間を評価しているので，MAP $(\hat{U}_n, \hat{V}_n)$ のよる平均系内時間 $\bar{W}_1$ と MAP (C_n, D_n) による平均系内時間 $\bar{W}_2$ が等しくなることを要請する．しかし，実際の計算においては，状態数の違いから必ずしも $\bar{W}_1$ と $\bar{W}_2$ を一致させることはできない．そこで，以下のような近似を行う．

条件 1〜3 より MAP (C_n, D_n) の 4 個のパラメータのうちの 1 個，例えば，到着率 λ_0 を用いて他の 3 個のパラメータ λ_1，q_0，q_1 を簡単な式で表すことができる．したがって，MAP (C_n, D_n) による平均系内時間 $\bar{W}_2$ は 1 変数 λ_0 の関数となる．そこで，1 変数のニュートン法によって $|\bar{W}_2 - \bar{W}_1|$ をなるべく小さくなるようにし，その最小値を与えるパラメータを求めるパラメータとする．

6. 提案する近似値とシミュレーション値の比較

$L = 10$ としたときのノード n での平均系内時間 W_n のシミュレーション値（sim）と，近似バッファサイズ $K = 20$ として退去過程を 2 状態 MMPP である MAP (C_n, D_n) で近似して計算した近似値（proposed），及び M/M/1 の平均系内時間（M/M/1）を表 1，表 2 の六つの場合（case 1〜6）において比較する．それぞれの場合の，ノード 1 への到着過程である MMPP のパラメータ $(\lambda_0, \lambda_1, q_0, q_1)$ を表 1 に示し，各ノード n のサービス率 μ_n を表 2 に示している．

比較した結果を図 3〜図 8 に示す．図 3 は case 1 の結果，図 4 は case 2 の結果，$\cdots$，図 8 は case 6 の結果を表している．提案する近似値（proposed）の計算では，漸化式 (7) の収束及び条件 1〜4 を満たしているとの判断は，ともに誤差率 10^{-5} 以下とした．従来のように到着過程をポアソン過程とみなすと，平均系内時間は図中の M/M/1 となり，シミュレーション値に対して危険側であることがわかる．

表 1　入力の 2 状態 MMPP のパラメータ値
Table 1　Parameter values of input 2-state MMPP.

case	λ_0	λ_1	q_0	q_1
case 1, 2, 3	1.0	0.0	0.1	0.01
case 4, 5, 6	1.0	0.0	0.1	0.1

表 2　各ノードのサービス率
Table 2　Service rate of each node.

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}
case 1, 4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
case 2, 5	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
case 3, 6	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1

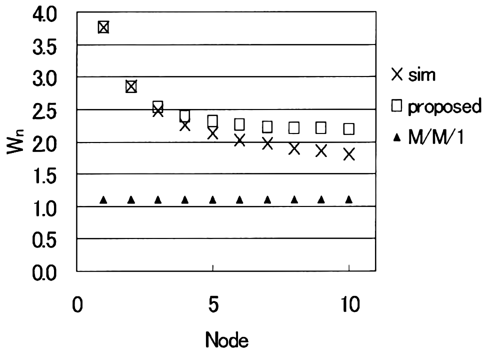

図 3　各ノードでの平均系内時間（case 1）
Fig. 3　Average sojourn time at each node (case 1).

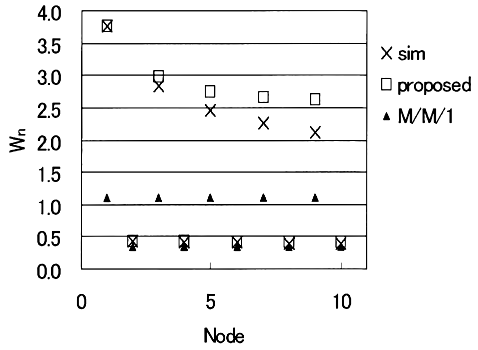

図 4　各ノードでの平均系内時間（case 2）
Fig. 4　Average sojourn time at each node (case 2).

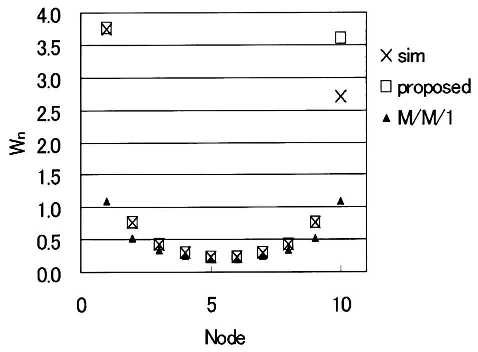

図 5　各ノードでの平均系内時間（case 3）
Fig. 5　Average sojourn time at each node (case 3).

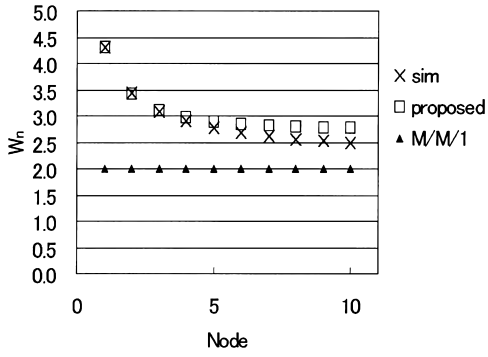

図 6　各ノードでの平均系内時間（case 4）
Fig. 6　Average sojourn time at each node (case 4).

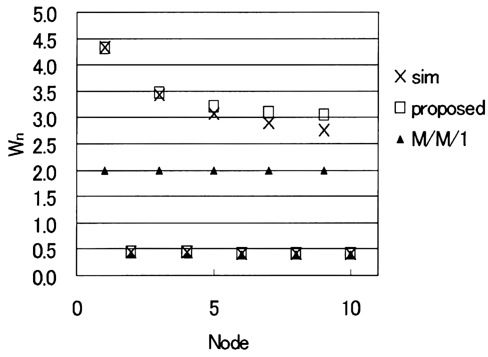

図 7　各ノードでの平均系内時間（case 5）
Fig. 7　Average sojourn time at each node (case 5).

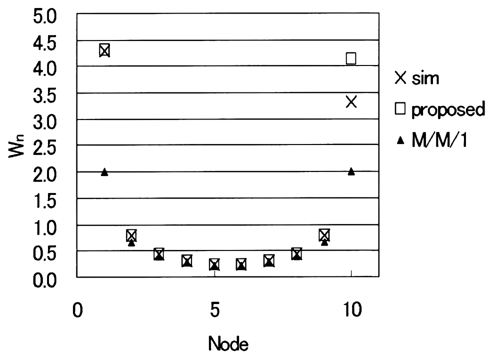

図 8　各ノードでの平均系内時間（case 6）
Fig. 8　Average sojourn time at each node (case 6).

7. 考　　察

7.1 近似精度について

提案法による近似値は，多くの場合において平均系内時間のシミュレーション値に近い値を与えている．提案法ではノードを通過するたびに近似を実行するので，後のノードになるほど近似精度が悪くなるが，このような場合でもシミュレーション値に対して安全側であることが多くの数値例から確認できている．

筆者らは，退去過程の近似のために四つの条件（条

件 1〜4）を一致させることを提案した．特に条件 1 の平均到着率と条件 3 の到着を伴わない遷移率行列の最大固有値は，ノードを通過する前と後で常に保存される量である．このことから，条件 1 と条件 3 を要請することは自然なことである．また，条件 4 では，各ノードからの退去過程とそれを近似する 2 状態 MMPP の次ノードのサービス率よる平均系内時間が一致することを要請している．評価すべき平均系内時間を一致するようにしているので，精度の良い特性が得られたと考えられる．条件 1〜3 で退去過程の統計的な性質を取り入れ，条件 4 で平均系内時間に対する性質を取り入れ，これらを組み合わせたことによって良い結果が得られたといえる．

筆者らは，最終的に条件 1〜4 に到達するまでにいくつかの条件の組を試みた．例えば，条件 1〜3 に加えて，条件

$$xV_n^3\mathbf{1} = \psi D_n^3\mathbf{1} \qquad (28)$$

すなわち，式 (15) において $k = 3,\ t_1 = t_2 = t_3 = 0$ とおいた条件の四つの条件によって到着過程を近似することを考えた．しかし，この場合，得られた平均系内時間の近似値はすべて危険側の値となってしまった．

あるいはまた，退去過程を近似する MMPP のパラメータを遷移率 q_0，q_1 をノード 1 への到着過程の遷移率と等しくし，到着率 λ_0, λ_1 を条件 1，4 を満たすように決定するという近似法でも，ノード 3 以降では危険側となってしまった．このことから，条件 4 を満たすだけでは精度良い近似とはならないことがわかる．筆者らが提案する条件 1〜4 を組み合わせることで，条件 4 を満たす MMPP のうちで，部分的に退去過程と同じ性質をもち，同時に部分的に到着過程と同じ性質をもつ MMPP を選ぶことで精度良く近似でき，安全側になると考える．

7. 2　実行時間の比較について

シミュレーション値及び提案法による近似値を得るために必要な計算時間の比較を行う．case 1 の 10 ノードの平均系内時間を得る計算時間を比較する．$K = 20$ とする．ほぼ同等な条件で比較するために，提案法における条件 4 のニュートン法の収束条件の誤差の 2 乗を 10^{-6} とし，一方，シミュレーションでは 10 番目のノードの平均系内時間に対する推定値の分散が 2.8×10^{-5} となるようにシミュレーション時間を決めた．用いた計算機の性能は，Pentium III，1 GHz，メモリ 256 MByte，HDD 80 GByte である．その結果，提案法では 0.17 秒，シミュレーションでは 11.9 秒かかった．

表 3　近似バッファサイズ K に対する提案法の計算時間 T とノード 10 の平均系内時間の近似値 $\bar{W}$

Table 3　Computation time T and the average sojourn time $\bar{W}$ for the buffer size K.

K	T	$\bar{W}$
10	0.02 (s)	2.21
20	0.17 (s)	2.27
30	0.66 (s)	2.27
40	1.75 (s)	2.27
50	3.73 (s)	2.27

また，同じパラメータ条件で，近似バッファサイズ K に対する提案法の計算時間 T 及び 10 番目のノードの平均系内時間 $\bar{W}$ を調べ，表 3 の結果を得た．シミュレーションの実行時間は K に依存しない．

この表より，$T \simeq K^{3.2}$ であることがわかる．また，$\bar{W}$ の値を見ると $K = 20$ 程度で十分収束しているとみなせるので，提案法の計算時間はシミュレーションと比較して高速であるといえる．

7. 3　K の決め方について

バッファサイズを近似する K の値が小さいと，退去過程を近似する MMPP のパラメータ値を決定できない場合がある．K の値が小さいと平均系内時間の近似値が M/M/1 の平均系内時間よりも小さくなる．条件 1 で平均到着率を一致させているので，到着率の等しいどんな MMPP を用いてもその平均系内時間 $\bar{W}_2$ は M/M/1 の平均系内時間よりも大きい．この場合に上記のパラメータ決定法を実行すると到着率や遷移率が負の値になるなど不都合が生じる．K の値を大きくすることによってこの問題を回避することができる場合もあるが，そうすると計算量が多くなるので，K の値を決める基準が問題になる．

8. む す び

2 状態 MMPP を到着過程とする指数サーバ多段系列の各ノードでの平均系内時間の近似値の計算方法を提案した．提案法による平均系内時間の近似値がシュミレーション値に対して安全側で精度が良いことを確認した．本論文には示してないが，筆者らが行った 60 種類の例においても同様のことを確認した．

各ノードのバッファサイズを単に有限値 K で近似すると，ノード L への到着過程となる MAP の状態数が $2(K+1)^{L-1}$ となるので，MAP/M/1 の解析法をそのまま本論文の問題に適用するのは計算量の点で

困難である．

提案法により各ノードからの退去過程を 2 状態 MMPP で近似することで，ノード 2 以降に対して同じ計算アルゴリズムで各ノードを MMPP/M/1/K で近似して解析することができた．提案法では，退去過程を近似する 2 状態 MMPP のパラメータ値を決定するための四つの条件を与えた．バッファサイズ K の値が十分に大きい場合には平均系内時間の近似値を精度良く計算できた．K の値が不十分で退去過程を近似する MMPP のパラメータ値を決定できない場合もあったので，K の値の決め方が今後の課題となる．

また，一般のネットワークではトラヒックの合流があるが，このような場合に本研究を拡張することも今後の課題である．合流がある場合には，注目するコネクション以外を背景トラヒックと考えて，それらをまとめてポアソントラヒックとして扱うことを検討中である．

謝辞　本研究の一部は，ATR 環境適応通信研究所（現，ATR 適応コミュニケーション研究所）からの平成 11〜13 年度の助成研究費によって行われた．また，シミュレーションと近似値の計算時間の比較に関して御協力頂いた長岡技術科学大学修士 2 年生の坂本将清氏に感謝致します．

文　　献

[1] M.F. Neuts, Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1981.
[2] D.M. Lucantoni, K.S. Meier-Hellstern, and M.F. Neuts, “A Single Server Queue with Server Vacations and a Class of Non Renewal Arrival,” Adv. Appl. Prob., vol.22, pp.675–705, 1990.
[3] N. Bean, D. Green, and P. Taylor, “The output process of an MMPP/M/1 queue,” J. Appl. Prob., vol.35, pp.998–1002, 1998.
[4] C. Olivier and J. Walrand, “On the existence of finite-demensional filters for Markov-modulated traffic,” J. Appl. Prob., vol.31, pp.515–525, 1994.
[5] 米倉　誠，“MMPP/M/1 からの退去過程の MMPP による近似,” 長岡技科大修士論文，March 2001.
[6] 佐竹一郎，線形代数学，裳華房，1957.

付　　録

対角以外の要素が非負である行列 C が既約であるとは，ある正数 $\alpha > 0$ が存在して $C + \alpha I$ が既約となることである．

[定理]　行列 C は対角以外の要素が非負である既約な $d \times d$ 行列とする．C の実数の固有値のうちで最大のものを θ とすると，任意の正の d 次元行ベクトル y と正の d 次元列ベクトル z に対して

$$\lim_{t\to\infty} \frac{ye^{Ct}Cz}{ye^{Ct}z} = \theta \tag{A·1}$$

が成り立つ．

（証明）$\alpha > 0$ を十分大きな正数とすると，$C + \alpha I$ は既約な非負行列となる．Perron-Frobenius の定理より，$C + \alpha I$ は重複度 1 の正の固有値 θ_α をもち，θ_α 以外の固有値 $\eta_{\alpha,2}, \dots, \eta_{\alpha,d}$ に対して

$$|\eta_{\alpha,i}| \le \theta_\alpha \quad (i = 2, \dots, d) \tag{A·2}$$

が成り立つ．$C + \alpha I$ の固有値は C の固有値に α を加えたものに等しいので，定理の θ は $\theta = \theta_\alpha - \alpha$ であり，C の他の固有値 η_i は $\eta_i = \eta_{\alpha,i} - \alpha$ $(i = 2, \dots, d)$ である．式 (A·2) より，

$$\mathrm{Re}(\eta_i) < \theta \quad (i = 2, \dots, d) \tag{A·3}$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{Re}(\eta_i)$ は η_i の実部を表す．

さて，Perron-Frobenius の定理より，C の固有値 θ に対する固有列ベクトル x_1 として $x_1 > 0$ となるものがとれる．そして，列ベクトル $x_2, \dots, x_d$ が存在して，$P = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ とおくと，θ の重複度が 1 であることに注意して，C の Jordan 標準形

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{C} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{A·4}$$

が得られる．したがって，式 (A·4) より，

$$e^{-\theta t}e^{Ct}C = P \begin{bmatrix} \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & e^{(\tilde{C}-\theta I)t}\tilde{C} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} P^{-1} \tag{A·5}$$

となる．行列 $\tilde{C} - \theta I$ の固有値 $\eta_i - \theta$ $(i = 2, \dots, d)$ は式 (A·3) より $\mathrm{Re}(\eta_i - \theta) < 0$ を満たすので，下記の補題より，$t \to \infty$ のとき

$$e^{(\tilde{C}-\theta I)t} \to O \tag{A·6}$$

となる．したがって，$t \to \infty$ のとき式 (A·5) より

$$e^{-\theta t}e^{Ct}C \to \theta x_1 x_1^T \tag{A·7}$$

を得る．ここで，添字 T は転置を表す．同様にして，

$$e^{-\theta t}e^{Ct} \to x_1 x_1^T \tag{A·8}$$

を得るので，式 (A·7)，(A·8) より，結局，任意の y，z に対して

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ye^{Ct}Cz}{ye^{Ct}z} = \lim_{t\to\infty}\frac{ye^{-\theta t}e^{Ct}Cz}{ye^{-\theta t}e^{Ct}z} = \theta \tag{A·9}$$

を得る．（証明終）

[補題] 行列 A のすべての固有値の実部が負であるとき，

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = O \tag{A·10}$$

が成り立つ．

（証明） $A = N + S$ という分解を考える．ここで，S は準単純，N は巾零であり，$SN = NS$ である（文献 [6], p.146 例 1 参照）（この証明中で使用する記号は本文中の記号とは無関係である．むしろ，文献 [6] の記号に従った）．

また，文献 [6], p.148 例 2 より

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(S+N)t} \\ &= e^{St}\left(I + \frac{1}{1!}N + \frac{1}{2!}N^2 + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!}N^{\nu-1}\right) \end{aligned}$$

となる．A の固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とすると，それらの実部は負であることから

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e^{St} &= \lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{\alpha_n t} \end{bmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

となり，これより補題の結論を得る．（証明終）

（平成 13 年 9 月 13 日受付，14 年 1 月 28 日再受付）

米倉　誠

平 11 長岡技科大・工・電子機器卒．平 13 同大大学院修士課程了．同年松下電送システム(株)入社．

中川　健治　（正員）

昭 55 東工大・理・数学卒．昭 60 同大大学院博士課程満期退学．昭 60 NTT 研究所入社．平 4 長岡技科大工学部助教授．待ち行列理論，ネットワーク特性評価，大偏差理論等の研究に従事．理博．IEEE，情報理論とその応用学会，日本数学会各会員．

恩田　和幸　（正員）

平 4 長岡技科大・工・電気・電子システム卒．平 6 同大大学院電気・電子システム工学専攻修士課程了．同年 NTT アドバンステクノロジ(株)入社．平 10 ATR 環境適応通信研究所研究員．平 13 NTT アドバンステクノロジ(株)に復帰，現在に至る．

斎藤　茂　（正員）

昭 49 東北大・工・通信卒．昭 54 同大大学院博士課程了．同年 NTT 研究所入所．平 11 ATR 環境適応通信研究所室長，現在に至る．コヒーレント光伝送，光増幅中継伝送の研究に従事．工博．平 8 本会論文賞受賞．IEEE 会員．