論　文

ATMバーストセルトラヒックの待ち時間特性に対するISシミュレーション

上田　健志†　　　中川　健治††

IS Simulation for the Waiting Time of ATM Burst Cell Traffic

Takeshi UEDA† and Kenji NAKAGAWA††

あらまし　ATM 交換機内のバッファサイズを設計するために，様々なトラヒックに対するセル遅延特性を調べる必要がある．本研究では，セル遅延特性，特にセル遅延の α 値をシミュレーションによって求めることを目的とする．しかし，従来法であるモンテカルロ（MC：Monte Carlo）法では計算時間がかかること，及び疑似乱数の精度の限界のため，非常に小さい α に対するセル遅延特性を求めることができない．そこで，本研究ではインポータンスサンプリング（IS：Importance Sampling）法を適用し，高速に精度良く 10^{-9} 程度以下のセル遅延特性を得ることを目的とする．特に，ランダムセルトラヒックに対する待ち行列モデルである Geo/D/1 やバーストセルトラヒックに対する 2 状態 MMGP/D/1 待ち行列の定常状態における待ち時間特性に IS 法を適用し，large deviation 理論に基づいて近似的な最適シミュレーション分布を得る．そして得られたシミュレーション分布によって実際に IS シミュレーションを行い，MC シミュレーションと比較し高速性と 95%信頼区間の点で優れていることを示す．更に理論値，近似値との比較によって IS 推定値の精度の良さを示す．

キーワード　シミュレーション，IS 法，Geo/D/1，2 状態 MMGP/D/1

1. まえがき

ATM 網ではセルの統計多重のため各ノードでセルがバッファに蓄積され，そこで遅延が生じる．一つのノードで許容される遅延 W の α 値，すなわち $P(W > w) = \alpha$ となる w の値を調べることが重要となる．しかし，α が小さいと一般的なモンテカルロ（MC：Monte Carlo）シミュレーション法ではセル遅延特性を得ることは非常に困難である．そこで本研究では，非常に小さい α に対する遅延特性を得るために，インポータンスサンプリング（IS：Importance Sampling）法を適用する．IS 法は非常に小さい確率を高速に求めるために開発されたシミュレーション手法である．

本研究では，ATM 網におけるランダムセルトラヒックのモデルである幾何過程（Geo：Geometric Process），及びバーストセルトラヒックのモデルである 2 状態マルコフ変調幾何過程（MMGP：Markov Modulated Geometric Process）を入力とし，一定サービス時間，単一サーバの待ち行列システム，すなわち，Geo/D/1 及び 2 状態 MMGP/D/1 に対して IS 法を適用し，10^{-9} オーダの待ち時間特性を高速に精度良く得ることを目的とする．

これらのモデル Geo/D/1 と 2 状態 MMGP/D/1 に対する待ち時間解析は，他の方法，例えば行列解析等の理論的な方法によっても可能であるが，本研究はそのような理論的解析が困難なより複雑なトラヒックモデルへの IS 法の拡張のための基礎的な検討である．

2. IS シミュレーションの概要

インポータンスサンプリング（IS：Importance Sampling）シミュレーション法は，通常のモンテカルロ（MC：Monte Carlo）シミュレーション法では得られない小さい確率を高速に精度良く得るために開発された方法で，待ち行列におけるブロック確率 [2], [3], [10] や通信路符号の誤り率 [6] の推定など多くの工学的問題に対して適用されている．

† NEC 航空宇宙システム株式会社，横浜市
NEC Aerospace Systems Limited, Yokohama-shi, 222–0033 Japan
†† 長岡技術科学大学，長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, Nagaoka-shi, 940–2188 Japan

MC 法ではある確率 p を推定する場合に，推定値の標準偏差を $0.1p$ 以下にするために必要なシミュレーション回数は $100/p$ 以上である．したがって，p が小さいときには時間的な限界のため MC 法は実行不可能となる．また，文献 [5] でも示されているように，正規分布の裾の確率を推定するというような簡単な場合でも疑似乱数の精度の限界のため MC 法では小さい確率の推定はできない．

以上のような限界を克服するため IS 法が適用される．そこで，IS 法の原理について，正規分布の例を用いて以下に述べる（文献 [5] 参照）．

2.1 正規分布における IS 法の例

X を平均 0, 分散 1 の正規分布 P_0 に従う確率変数とし，$a > 0$ に対して確率 $P_0(X > a)$ の推定値をシミュレーションで求めるとする（図 1 参照）．

a の値が大きいと $\{X > a\}$ は希少事象となり，通常の MC 法では推定値が得られない．そこで，正規分布の平均値を少しずらして平均 μ，分散 1 の正規分布 P_μ を考え，この P_μ に従う確率変数 $\tilde{X}$ の標本値 $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ を発生させる．図 1 より，$\tilde{x}_i > a$ となる確率は大きいので，前節で述べた限界が克服される．そして，平均値の変化による頻度の変化分を重み関数 $P_0(\tilde{x}_i)/P_\mu(\tilde{x}_i)$ によって補正して，IS 推定値として

$$\hat{P}_{\mathrm{IS}}(X > a) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_a(\tilde{x_i})\frac{P_0(\tilde{x}_i)}{P_\mu(\tilde{x}_i)} \qquad (1)$$

を得る．ただし，$\delta_a(x)$ は $x > a$ のとき 1, $x \leqq a$ のとき 0 となる関数である．$\hat{P}_{\mathrm{IS}}(X > a)$ は $P_0(X > a)$ の不偏推定量である [1]．平均値 μ をうまく選ぶと IS 推定値の分散を MC 推定値の分散より小さくすることができる．シミュレーション回数を N とすると，分散は N^{-1} に比例するので，IS 推定値と MC 推定値の分散を同程度にすれば IS 法は MC 法よりシミュレーション回数が少なくてすむ．これが IS 法が MC 法より高速な理由である．

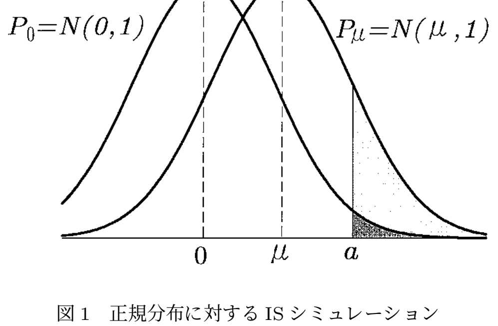


図 1　正規分布に対する IS シミュレーション
Fig. 1　IS simulation for normal distribution.

3. 入力トラヒックモデルと待ち時間シミュレーション

本研究では，ATM におけるランダムセルトラヒックを表現できる幾何過程（Geo：Geometric Process）モデルとバーストセルトラヒックを表現できるマルコフ変調幾何過程（MMGP：Markov Modulated Geomtric Process）モデルを考える．

3.1 幾何過程に従う到着間隔

1 タイムスロットにおけるセルの到着率を q としてセルとセルの到着間隔が τ となる確率 $P(\tau)$ が

$$P(\tau) = q(1-q)^\tau \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

と表されるとき，到着間隔は到着率 q の幾何過程に従うという．

3.2 2 状態 MMGP に従う到着間隔

2 状態 MMGP は，到着率 q_0 の幾何分布に従う到着間隔でセルが到着する状態 $S = 0$ と，到着率 q_1 の幾何分布による状態 $S = 1$ とをマルコフ的に遷移する過程である．状態 $S = 0$ から $S = 1$ への状態遷移確率を r_{01}, $S = 1$ から $S = 0$ へは r_{10} とする．シミュレーションでは，あるタイムスロットにセルが到着したとすると，そこでマルコフ連鎖に従って新たに状態を決定し，その状態が $S = i$ のとき到着率 q_i の幾何分布によって次のセルの到着時刻を決め，以下これを繰り返す．

3.3 Geo/D/1 における待ち時間の基本漸化式

Geo/D/1 待ち行列において，n 番目のセルの待ち時間を $W(n)$ とし，セルの到着間隔を表す到着率 q の幾何分布に従う確率変数を τ とすると，次の漸化式が成り立つ．

$$W(n+1) = \max(0, W(n) + 1 - \tau) \qquad (3)$$

式 (3) より $W(n)$ はマルコフ連鎖をなすことがわかる．$W(n+1) - W(n) = y$ とおくと，$W(n) = m$ という条件のもとでの y の条件付き確率 $P_m(y)$ は $m > 0$ のとき

$$P_m(y) = \begin{cases} q(1-q)^{1-y} & (-m < y \leqq 1) \\ (1-q)^{m+1} & (y = -m) \end{cases} \qquad (4)$$

となる．

3.4 2状態 MMGP/D/1 における待ち時間の基本漸化式

2状態 MMGP/D/1 待ち行列において，n 番目のセルの到着時点での状態を $S(n)$，到着率 q_i の幾何分布に従う確率変数を $\tau_i, i=0,1$ とすると，次の漸化式が成り立つ．

$$W(n+1)=\max(0,W(n)+1-\tau_{S(n)}) \tag{5}$$

$S(n)$ はマルコフ連鎖に従うから，式 (5) より組 $(W(n),S(n))$ はマルコフ連鎖をなすことがわかる．$W(n+1)-W(n)=y$, $S(n+1)=j$ とおくと，$W(n)=m$, $S(n)=i$ という条件のもとでの (y,j) の条件付き確率 $P_{m,i}(y,j)$ は，$m>0$ のとき

$$P_{m,i}(y,j)=\begin{cases} q_i(1-q_i)^{1-y}r_{ij} & (-m<y\leqq 1) \\ (1-q_i)^{m+1}r_{ij} & (y=-m) \end{cases} \tag{6}$$

となる．

3.5 待ち時間特性 $P(W>w)$ の推定値

W を定常状態における待ち時間，すなわち $W=\lim_{n\to\infty}W(n)$ とする．W がある待ち時間 w を超える確率の MC 法による推定値 $\hat{P}(W>w)$ は再生サイクル（RC：Regenerative Cycle）の概念 [3] を用いて表すと，

$$\hat{P}(W>w)=\frac{\dfrac{1}{A}\displaystyle\sum_{k=1}^{A}\sum_{n=1}^{N_k}\delta_w(W(n))}{\dfrac{1}{B}\displaystyle\sum_{k=1}^{B}N_k'} \tag{7}$$

となる．ただし，$\delta_w(W(n))$ は $W(n)>w$ のとき 1，$W(n)\leqq w$ のとき 0 となる関数を表す．A, B はシミュレーション中に発生した RC の数を表し，N_k, N_k' は k 番目の RC 中で発生したセル個数を表す．

4. $P(W>w)$ に対する IS 推定値

大きな w の値に対して $\{W>w\}$ は希少事象となる．そこで，待ち行列における IS 法では，事象 $\{W>w\}$ の発生頻度を高めるために入力トラヒックの到着率を増加させてシミュレーションを行い，最後に重み関数で補正して $P(W>w)$ に対する推定値を得る．シミュレーションで用いる分布をシミュレーション分布という．

待ち行列モデルに IS 法を適用したときの待ち時間特性 $P(W>w)$ の推定値と重み関数を以下に示す．2状態 MMGP/D/1 の $P(W>w)$ に対する IS 推定値 $\hat{P}_{\mathrm{IS}}(W>w)$ は，RC を用いて，

$$\hat{P}_{\mathrm{IS}}(W>w)=\frac{\dfrac{1}{A}\displaystyle\sum_{k=1}^{A}\sum_{n=1}^{N_k}\delta_w(W(n))G_k(n)}{\dfrac{1}{B}\displaystyle\sum_{k=1}^{B}\sum_{n=1}^{N_k'}G_k(n)} \tag{8}$$

となる．ただし，A, B はシミュレーション中に発生した RC の数，N_k, N_k' は k 番目の RC 中に発生したセル個数，$G_k(n)$ は重み関数である．式 (8) の重み関数 $G_k(n)$ は，

$$G_k(n)=\prod_{c=1}^{n-1}\frac{p(W_k^*(c),S_k^*(c)|W_k^*(c-1),S_k^*(c-1))}{p^*(W_k^*(c),S_k^*(c)|W_k^*(c-1),S_k^*(c-1))} \tag{9}$$

となる．ここで，分母 $p^*(W_k^*(c),S_k^*(c)|W_k^*(c-1),S_k^*(c-1))$ は，シミュレーション分布に従って発生した $c-1$ 番目のセルに対する待ち時間と状態の組 $(W_k^*(c-1),S_k^*(c-1))$ が c 番目の $(W_k^*(c),S_k^*(c))$ へ遷移するシミュレーション分布による遷移確率を表し，分子 $p(W_k^*(c),S_k^*(c)|W_k^*(c-1),S_k^*(c-1))$ はシミュレーション分布に従って発生した $c-1$ 番目のセルに対する $(W_k^*(c-1),S_k^*(c-1))$ が c 番目の $(W_k^*(c),S_k^*(c))$ へ遷移するもとの分布による確率を表す．

具体的に，Geo/D/1 及び 2状態 MMGP/D/1 待ち時間の重み関数は以下のとおりになる．

まず，Geo/D/1 待ち時間の重み関数 $G_k(n)$ は，

$$G_k(n)=\prod_{c=1}^{n-1}\frac{q(1-q)^{\tau^*(c)}}{q^*(1-q^*)^{\tau^*(c)}} \tag{10}$$

となる．ただし，q^* はシミュレーション分布の到着率であり，$\tau^*(c)$ は c 番目と $c+1$ 番目の到着間隔を表す到着率 q^* の幾何分布を表す．ここで，シミュレーション分布の到着率を q^* としたが，IS 法では q^* をどのように決定するかが重要となる．q^* の最適値が，次章で最適シミュレーション分布によって与えられる．

次に，2 状態 MMGP/D/1 待ち時間の重み関数 $G_k(n)$ は，

$$G_k(n) = \prod_{c=1}^{n-1} \frac{q_{S(c)}(1-q_{S(c)})^{\tau^*_{S(c)}} r_{S(c)S(c+1)}}{q^*_{S(c)}(1-q^*_{S(c)})^{\tau^*_{S(c)}} r^*_{S(c)S(c+1)}} \tag{11}$$

となる．ただし，$S(c)$ は c 番目のセルに対する状態を表し，q^*_i, r^*_{ij} はシミュレーション分布の到着率及び遷移確率である．また，τ^*_i は到着率 q^*_i の幾何分布を表す．これら q^*_i, r^*_{ij} の最適値が，最適シミュレーション分布によって与えられる．

4.1 ダイナミックインポータンスサンプリング

待ち時間に対する IS シミュレーションでは到着率を増加させてシミュレーションを行うために RC におけるセル個数が増加する．したがって，RC 当りのシミュレーション時間も増加してしまう．そこで，IS 法ではシミュレーション時間を減少させるためにダイナミックインポータンスサンプリング（DIS：Dynamic Importance Sampling）という手法を用いて高速化を行う [3]．

DIS は，IS 法で各 RC において十分な待ち時間事象を得た後に到着率を下げて待ち時間を 0 にすることで RC を強制的に終了させる手法である．ここで，十分な待ち時間事象とは，ある待ち時間 w を超えるセル個数が 15 から 30 程度発生した事象をいう．この DIS という手法を導入することで，RC 当りのシミュレーション時間が減少しシミュレーションの高速化が図れる．本研究では，すべての IS シミュレーションに DIS 法を用いている．

5. 最適シミュレーション分布

IS 法でシミュレーションに用いる分布をシミュレーション分布という．このとき重要なことは良いシミュレーション分布を使用することである．良いシミュレーション分布とは，IS 法によって得られる推定値の分散が小さい分布である．待ち行列に IS 法を適用する場合，勝手なシミュレーション分布を使用すると，重み関数で補正しても正しい値を得ることができない [5], [10]．IS 推定値の分散が最小となるシミュレーション分布を最適シミュレーション分布といい，この最適シミュレーション分布で IS シミュレーションを行うことで正しい推定値を得ることができる．

以下に最適シミュレーション分布を求めるいくつかの手法をあげる．最適シミュレーション分布を求める方法には，最も一般的な従来法として以下の二つがある．

（1） 事前シミュレーション法による導出 [10]
（2） 理論的な導出 [1], [4]

これらに加えて，本研究では最適なシミュレーション分布を求める第 3 番目の手法として，

（3） 近似解析による導出

を提案する．

上記（1）〜（3）の手法について順に説明する．説明のために Geo/D/1 の待ち時間を例にする．

5.1 事前シミュレーション法による導出

事前シミュレーション法とは，いろいろなシミュレーション分布で IS シミュレーションを行い，得られた推定値の平均が安定している領域で分散が最小になる部分の到着率を最適到着率 q^* として決定する方法である [10]．実際に事前シミュレーション法を用いて Geo/D/1 待ち時間の最適シミュレーション分布を決定した例を示す．図 2 は，到着率 $q = 0.4$ の Geo/D/1 待ち時間における事前シミュレーションの例である．図 2 の横軸はシミュレーション分布の到着率，左縦軸は待ち時間 W が待ち時間 50 を超える確率 $P(W > 50)$ の推定値 100 個の標本平均，右縦軸は標本分散を，それぞれ対数表示したものである．シミュレーション分布の到着率は 0.45 から 0.9 まで 0.0045 刻みで変化させ，その刻みごとに $P(W > 50)$ の推定値の標本平均と標本分散を示した．1 標本当りの発生 RC 数は 1,000 である．図 2 において，$P(W > 50)$ の推定値の平均が安定している領域で分散が最小の部分の q^* は 0.6

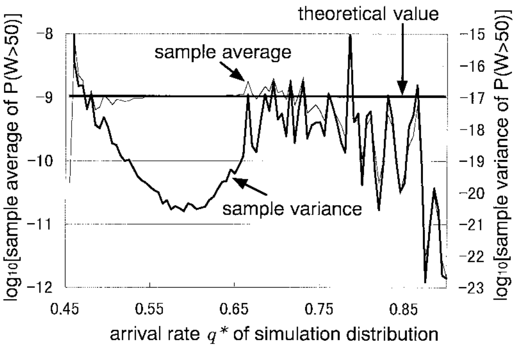


図 2 シミュレーション分布の到着率 q^* に対する IS 推定値の標本平均と標本分散（Geo/D/1）
Fig. 2 Sample average and sample variance of IS estimate vs. arrival rate of simulation distribution (Geo/D/1).

である．したがって，この 0.6 が最適な到着率となる．

しかし，事前シミュレーションもシミュレーションであるため一つのシミュレーション結果を得るのに大変な時間を必要とする．また，図 2 を見てわかるように，分散が最小の所でも少し幅があるために正確な最適シミュレーション部分を見極めることが困難となる．したがって，もう少し簡単に正確な最適シミュレーション分布を求める必要がある．

5. 2 理論的な導出

IS シミュレーションに large deviation 理論 [1], [4] を適用し IS 推定値の分散を最小にする最適シミュレーション分布を得る．文献 [1], [2] によれば以下の結果が得られる．

一般に，次の Markov 連鎖モデル $\{x_n\}$ を考える．

$$x_{n+1} = x_n + V(x_n, \xi_n) \quad (n = 0, 1, \ldots,) \tag{12}$$

ここで，ξ_n は i.i.d.（independent and identically distributed；独立同分布）確率変数で，V は x_n と ξ_n の deterministic な関数である．$x_n = x$ という条件のもとで $V(x_n, \xi_n) = y$ となる条件付き確率を $P_x(y) \equiv P(V(x_n, \xi_n) = y | x_n = x)$ とし，$P_x(y)$ に関するモーメント母関数を $M_x(\theta) = \sum_y e^{\theta y} P_x(y)$ とすると，確率 $P(x_n > y)$ に対する IS シミュレーションにおける最適シミュレーション分布は，

$$M_x(\theta) = 1 \tag{13}$$

を満たす解 $\theta = \theta^*$ によって

$$P(V(x_n, \xi_n^*) = y | x_n = x) = e^{\theta^* y} P_x(y) \tag{14}$$

で決まる ξ_n^* によって与えられる．

以上の理論的な導出法を Geo/D/1 待ち時間シミュレーションに当てはめて説明する．まず，Geo/D/1 の待ち時間において，式 (3) より $W(n)$ がマルコフ連鎖をなすことがわかるので，上記の理論的な導出法が適用可能である．

まず，$m > 0$ のとき $P_m(y)$ のモーメント母関数 $M_m(\theta)$ は式 (4) より，

$$\begin{aligned} M_m(\theta) &= \sum_{y=-m}^{1} e^{\theta y} P_m(y) \\ &= e^{-m\theta}(1-q)^{m+1} \\ &\quad + \sum_{y=-m+1}^{1} e^{\theta y} q (1-q)^{1-y} \\ &= \frac{e^{2\theta} q}{e^{\theta} - (1-q)} \\ &\quad + \frac{e^{\theta} - 1}{e^{\theta} - (1-q)} e^{-m\theta} (1-q)^{m+2} \end{aligned} \tag{15}$$

となる．そこで，式 (13) に基づいて，

$$M_m(\theta) = 1 \tag{16}$$

の解 $\theta = \theta^*$ を用いて，式 (14) より最適なシミュレーション分布が

$$e^{\theta^* y} P_m(y) \tag{17}$$

と与えられる．

実際に数値的に得られた θ^* の値を表 1 に示す．表 1 を見てわかるように，理論的解析法では最適な θ^* は待ち時間 m に依存する．つまり，待ち時間 m ごとに式 (16) を数値的に解く必要があり，非常に計算量が多くなってしまう．したがって，更に簡単に最適な θ^* を求める必要がある．

5. 3 近似解析による導出

本研究では高速かつ簡単な最適シミュレーション分布を求める近似解析を提案する．この近似解析は，理論的解析法に近似を入れることで，最適シミュレーション分布を近似的に求める方法である．

5. 3. 1 Geo/D/1 における最適シミュレーション分布の到着率に対する近似値

式 (15) より，

$$\left.\frac{dM_m(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 2 - \frac{1}{q} + \frac{(1-q)^{m+1}}{q} \tag{18}$$

となる．Geo/D/1 待ち行列の安定条件は $q < 1/2$ で

表 1 理論解析による Geo/D/1 の最適な θ^* の値
Table 1 The optimal θ^* of Geo/D/1 by theoretical analysis.

	$q = 0.1$	$q = 0.2$	$q = 0.3$	$q = 0.4$
$m = 1$	2.092	1.163	0.491	0.000
$m = 2$	2.188	1.351	0.771	0.271
$m = 3$	2.196	1.380	0.827	0.361
$m = 4$	2.197	1.385	0.841	0.389
$m = 5$	2.197	1.386	0.846	0.399
$m = 6$	2.197	1.386	0.847	0.403
$m = 7$	2.197	1.386	0.847	0.404
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$m = 50$	2.197	1.386	0.847	0.405
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

あるから（後述の式 (37) 参照），式 (18) より

$$m > \frac{\log(1-2q)}{\log(1-q)} - 1 \tag{19}$$

のとき $dM_m(\theta)/d\theta|_{\theta=0} < 0$ となる．$M_m(\theta)|_{\theta=0} = 1$ であるから，式 (19) を満足する m に対して，方程式 $M_m(\theta) = 1$ は解 $\theta = \theta^* > 0$ をもつことがわかる．したがって，式 (15) より，m が大きいとき

$$M_m(\theta^*) \simeq \frac{e^{2\theta^*}q}{e^{\theta^*} - (1-q)} \tag{20}$$

と近似される．そこで式 (16)，(20) より，

$$\frac{e^{2\theta^*}q}{e^{\theta^*} - (1-q)} \simeq 1 \tag{21}$$

となり，式 (21) より

$$e^{\theta^*} \simeq \frac{1-q}{q} \tag{22}$$

となる．$P_m^*(y)$ を式 (4) の形の分布として，その到着率を q^* とすると，

$$P_m^*(y) = \begin{cases} q^*(1-q^*)^{1-y} & (-m < y \leqq 1) \\ (1-q^*)^{m+1} & (y = -m) \end{cases} \tag{23}$$

となるが，そこで

$$q^* = 1 - q \tag{24}$$

とおくと，式 (4)，(22)〜(24) より，m が大きいとき，計算により

$$P_m^*(y) \simeq e^{\theta^* y} P_m(y) \quad (-m \leqq y \leqq 1) \tag{25}$$

となることが容易に確かめられる．したがって，式 (17) より，$P_m^*(y)$，すなわち式 (24) の到着率 $q^* = 1-q$ をもつ分布が近似的に最適シミュレーション分布となる．

このように，Geo/D/1 待ち時間に近似的解析手法を用いると事前シミュレーションや数値的解析なしで，最適な到着率を求めることができる．

5. 3. 2 2 状態 MMGP/D/1 における最適シミュレーション分布の到着率と遷移確率に対する近似値

次に，2 状態 MMGP/D/1 の IS 法における最適シミュレーション分布を近似的に求める．

まず，式 (6) より $m > 0$ のとき $P_{m,i}(y,j)$ のモーメント母関数 $M_{m,i}(\theta_1, \theta_2)$ は，

$$M_{m,i}(\theta_1,\theta_2) \tag{26}$$

$$= \sum_{j=0}^{1} r_{ij} e^{\theta_2(j-i)} \sum_{y=-m}^{1} e^{\theta_1 y} P_{m,i}(y,j)$$

$$= \sum_{j=0}^{1} r_{ij} e^{\theta_2(j-i)} \left\{ \frac{e^{2\theta_1}q_i}{e^{\theta_1} - (1-q_i)} + \frac{e^{\theta_1} - 1}{e^{\theta_1} - (1-q_i)} e^{-m\theta_1}(1-q_i)^{m+2} \right\} \tag{27}$$

と計算される．m が十分大きいとき，式 (20) と同様に式 (27) は

$$M_{m,i}(\theta_1,\theta_2) \simeq \sum_{j=0}^{1} r_{ij} e^{\theta_2(j-i)} \frac{e^{2\theta_1}q_i}{e^{\theta_1} - (1-q_i)} \tag{28}$$

と近似される．式 (13)，(28) に基づいて θ_1, θ_2 に関する方程式

$$\sum_{j=0}^{1} r_{ij} e^{\theta_2(j-i)} \frac{e^{2\theta_1}q_i}{e^{\theta_1} - (1-q_i)} = 1 \quad (i = 0, 1) \tag{29}$$

を以下のように解く．行列 $R = (R_{ij})$ とベクトル $z = (z_i)$ を

$$R_{ij} = r_{ij} \frac{e^{2\theta_1}q_i}{e^{\theta_1} - (1-q_i)} \quad (i, j = 0, 1) \tag{30}$$

$$z_i = e^{\theta_2 i} \quad (i = 0, 1) \tag{31}$$

によって定義すると，式 (29) は

$$Rz = z \tag{32}$$

と書ける．式 (32) より R は固有値 1 をもつので，固有方程式 $\det(R - E) = 0$（E は 2×2 単位行列）より解 $\theta_1 = \theta_1^*$ が得られる．また，z がその固有ベクトルであることから解 $\theta_2 = \theta_2^*$ が z_i の定数倍を除いて得られる（文献 [4], [5] 参照）．得られた解 θ_1^*, θ_2^* より最適シミュレーション分布のパラメータ

$$q_i^* = 1 - e^{-\theta_1^*}(1-q_i) \quad (i = 0, 1) \tag{33}$$

$$r_{ij}^* = e^{\theta_2^*(j-i)} \frac{e^{2\theta_1^*}q_i}{e^{\theta_1^*} - (1-q_i)} r_{ij} \quad (i, j = 0, 1) \tag{34}$$

が得られる．式 (33)，(34) により得られた q_i^*, r_{ij}^* の数値例を表 2 に示す．

表 2　近似解析による 2 状態 MMGP/D/1 の最適シミュレーション分布の到着率と遷移確率の近似値
Table 2　Approximating values for the optimal arrival rate and the optimal transition probabilities of 2-state MMGP/D/1.

もとの到着率と遷移確率 $(q_0, q_1; r_{01}, r_{10})$	最適な到着率と遷移確率の近似値 $(q_0^*, q_1^*; r_{01}^*, r_{10}^*)$
$(0.10, 0.40; 0.90, 0.10)$	$(0.49, 0.66; 0.96, 0.04)$
$(0.10, 0.40; 0.20, 0.20)$	$(0.59, 0.72; 0.70, 0.03)$
$(0.10, 0.40; 0.50, 0.50)$	$(0.71, 0.81; 0.77, 0.22)$
$(0.10, 0.40; 0.50, 0.80)$	$(0.79, 0.86; 0.73, 0.60)$
$(0.10, 0.40; 0.10, 0.90)$	$(0.87, 0.91; 0.30, 0.70)$

6. 待ち時間特性の理論値または近似値

6.1 Geo/D/1 待ち時間特性の理論値

式 (3) より Geo/D/1 待ち時間の状態遷移確率 $P = P(W(n+1)|W(n))$ は，

$$P = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & \cdots \\ (1-q)^2 & q(1-q) & q & 0 & \cdots \\ (1-q)^3 & q(1-q)^2 & q(1-q) & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{35}$$

となる．そして，方程式

$$pP = p \tag{36}$$

を解いて待ち時間の定常分布 $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ を得る．定常分布 p より待ち時間特性 $P(W > w)$ として

$$P(W > w) = \left(\frac{q}{1-q}\right)^{w+1} \tag{37}$$

を得る．

6.2 2 状態 MMGP/D/1 待ち時間特性の近似値

文献 [4] における近似値の導出法を適用して，2 状態 MMGP/D/1 待ち時間特性 $P(W > w)$ の近似値 $\tilde{P}_w$ を以下の手順で導出することができる．

式 (29) を解いて得られた $\theta_1 = \theta_1^*$ によって，近似値

$$\tilde{P}_w = e^{-\theta_1^*(w+1)} \quad (w = 0, 1, 2, \ldots) \tag{38}$$

を得る．

7. シミュレーション結果と評価

7.1 IS 法を用いた Geo/D/1 及び 2 状態 MMGP/D/1 待ち時間特性の評価

図 3，図 4 は，それぞれ Geo/D/1 と 2 状態 MMGP/D/1 待ち時間特性シミュレーションの結果である．比較のため，Geo/D/1 では式 (24) で示した到着率を用いて行った IS 法，MC 法，及び理論値を示し，2 状態 MMGP/D/1 では式 (33)，(34) で示した到着率と遷移確率を用いて行った IS 法，MC 法，及び式 (38) の近似値を示す．また，MC 法ではシミュレーション回数を 10^6 とし，IS 法ではシミュレーション回数を 10^3 としてシミュレーションを行った．

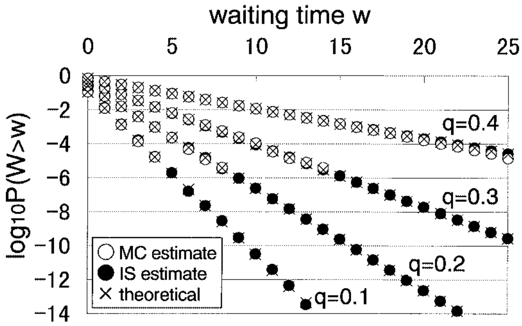
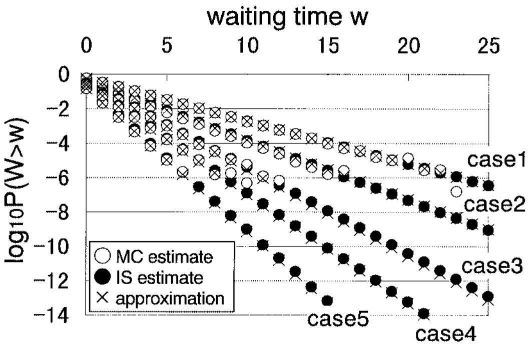


図 3　Geo/D/1 待ち時間特性 $P(W > w)$
Fig. 3　Waiting time probability $P(W > w)$ of Geo/D/1.



	$(q_0, q_1; r_{01}, r_{10})$
case1	$(0.10, 0.40; 0.90, 0.10)$
case2	$(0.10, 0.40; 0.20, 0.20)$
case3	$(0.10, 0.40; 0.50, 0.50)$
case4	$(0.10, 0.40; 0.50, 0.80)$
case5	$(0.10, 0.40; 0.10, 0.90)$

図 4　2 状態 MMGP/D/1 待ち時間特性 $P(W > w)$
Fig. 4　Waiting time probability $P(W > w)$ of 2-state MMGP/D/1.

図 3，図 4 を見ると，MC 法では $P(W > w)$ の推定値が 10^{-6} 程度しか得られていないのに対して，IS 法では本研究の目的である 10^{-9} オーダの $P(W > w)$ の推定値も得ることができる．このように，IS 法を用

表 3　MC 法と IS 法の標本平均，標本分散とシミュレーション時間の比較（2 状態 MMGP/D/1，($q_0 = 0.1$，$q_1 = 0.4$；$r_{01} = 0.9$，$r_{10} = 0.1$)，$P(W > 15)$ の場合）
Table 3　Comparison of sample average, sample variance, and simulation time between MC and IS methods (in the case of 2-state MMGP/D/1, ($q_0 = 0.1$, $q_1 = 0.4$; $r_{01} = 0.9$, $r_{10} = 0.1$), $P(W > 15)$).

	MC	IS
標本平均	1.26×10^{-4}	1.19×10^{-4}
標本分散	2.54×10^{-10}	2.40×10^{-10}
RC 数	10^6	300
1RC の平均シミュレーション時間（秒）	3.17×10^{-5}	3.16×10^{-4}
シミュレーション時間比	334	1

表 4　MC 法と IS 法の 95%信頼区間の比較（2 状態 MMGP/D/1，($q_0 = 0.1$，$q_1 = 0.4$；$r_{01} = 0.9$，$r_{10} = 0.1$)，$P(W > 15)$，RC 数=30,000 の場合）
Table 4　Comparison of 95% confidence intervals between MC and IS methods (in the case of 2-state MMGP/D/1, ($q_0 = 0.1$, $q_1 = 0.4$; $r_{01} = 0.9$, $r_{10} = 0.1$), $P(W > 15)$, number of RC $= 30,000$).

	95%信頼区間長
MC 法	3.55×10^{-4}
IS 法	3.61×10^{-6}

いて低い確率を求めることができることがわかる．

7.2 高速性

次に，IS 法が MC 法より高速であるということを示すためにシミュレーション時間比を求めた．

表 3 は，2 状態 MMGP/D/1 待ち時間における ($q_0 = 0.1, q_1 = 0.4$; $r_{01} = 0.9, r_{10} = 0.1$)，$P(W > 15)$ の場合において，IS 法と MC 法の標本平均，標本分散を同程度にそろえたときのシミュレーション時間の比較結果である．標本平均，標本分散を同程度になるようにシミュレーション中に発生する RC 数を調節した．ここで，標本平均と標本分散を求めるための標本数は 100 とした．結果として表 3 を見てわかるように，IS 法と MC 法の標本分散を同程度にしたとき，IS 法は MC 法より約 334 倍高速である．

7.3 95%信頼区間長

次に，IS 法と MC 法の 95%信頼区間長を評価する．

表 4 は，2 状態 MMGP/D/1 における ($q_0 = 0.1, q_1 = 0.4, r_{01} = 0.9, r_{10} = 0.1$)，$P(W > 15)$ の場合の待ち時間特性に対する 95%信頼区間長を評価したものである．信頼区間は RC 数 30,000 回のシミュレーションと標本数 100 の結果から標本平均と標本分散を計算して，95%信頼区間長を求めた．表 4 より，IS 法は MC 法より信頼区間長が 2 けた小さいことがわかる．つまり，IS 法は MC 法より真値に対するばらつきが少ない推定値を与える．

8. むすび

本研究では，待ち時間シミュレーションに対する IS 法の有効性を示すために，Geo/D/1，2 状態 MMGP/D/1 待ち行列モデルの待ち時間に対して IS 法を適用した．その結果，動画像伝送等で必要とされる 10^{-9} オーダの待ち時間特性を高速に得ることができた．

また，IS 法を待ち行列に用いる場合，最適シミュレーション分布を求めることが重要となるが，最適なシミュレーション分布を求める方法として，本研究では近似解析法を提案した．この近似解析法を使用することで，シミュレーションや多くの数値解析を行うことなく最適シミュレーション分布が求められた．本来の最適シミュレーション分布は現時点での状態 m あるいは (m, i) に依存するが，m を大きくしていくと一定の分布に収束するので，その収束した分布を最適分布の代わりに使用することで計算量を大幅に削減できる，というのが提案した近似解析法のポイントである．したがって，このような収束の特徴をもつ他の待ち行列モデルへの広い応用が考えられる．

文献

[1] J.A. Bucklew, Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation, Wiley, New York, 1990.
[2] M. Cottrell, J-C. Fort, and G. Malgouyres, “Large Deviations and Rare Events in the Study of Stochastic Algorithms,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-28, no.9, pp.907–920, Sept. 1983
[3] M. Devetsikiotis and J.K. Townsend, “Statistical Optimization of Dynamic Importance Sampling Parameters for Efficient Simulation of Communication Networks,” IEEE/ACM Trans. Networking, vol.1, no.3, pp.293–305, June 1993.
[4] K. Nakagawa, “The Importance Sampling Simulation of MMPP/D/1 Queueing,” IEICE Trans. Fund., vol.E80-A, no.11, pp.2238–2244, Nov. 1997.
[5] 小川耕司，中川健治，“MMPP/D/1 キューイングにおける最適 IS シミュレーション分布，” 信学論（B-I），vol.J80-B-I, no.2, pp.64–73, Feb. 1997.
[6] T. Sakai and H. Ogiwara, Importance Sampling for TCM Scheme over Non-Gaussian Noise Channel,” IEICE, Trans. Fund., vol.E78-A, no.9, Sept. 1995.

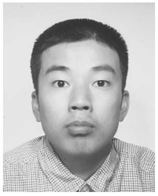
[7] 鈴木信吾，中川健治，“バックプレッシャ制御を用いたATM 交換機の IS 法による特性評価,” 信学論（B-I），vol.J81-B-I, no.6, pp.371–377, June 1998.

[8] 上田健志，中川健治，“待ち行列シミュレーションへの IS 法の適用,” 平 8 信学信越支大，pp.215–216, Oct. 1996.

[9] 上田健志，“IS 法を用いた ATM 交換機における待ち時間特性の解析,” 長岡技科大大学院修士論文，1998.

[10] Q. Wan and V.S. Frost, “Efficient Estimation of Cell Blocking Probability for ATM Systems,” IEEE/ACM Trans. Networking, vol.1, no.2, pp.230–235, April 1993.

（平成 10 年 7 月 2 日受付，11 年 1 月 6 日再受付）



上田　健志　（正員）

平 8 長岡技科大・工・電気・電子システム卒．平 10 同大大学院修士課程了．同年 NEC 航空宇宙システム（株）入社．

中川　健治　（正員）

昭 55 東工大・理・数学卒．昭 60 同大大学院博士課程満期退学．昭 60 NTT 研究所入社．平 4 長岡技術科学大学工学部助教授．統計的情報理論，待ち行列理論などの研究に従事．理博．IEEE，情報理論とその応用学会，日本数学会各会員．